FOLIA POMERANAE UNIVERSITATIS TECHNOLOGIAE STETINENSIS
Folia Pomer. Univ. Technol. Stetin. 2009, Oeconomica 275 (57), 131–136

Leonid WOROBJOW, Krzysztof WISIŃSKI, Aleksandra PANFIORAVA

STOSOWANIE METOD ESTYMACJI PRZEDZIAŁOWEJ W BADANIACH PRZYRODNICZYCH I EKONOMICZNYCH

AN APPLICATION OF INTERVAL ESTIMATION METHODS IN ECONOMIE AND NATURE STUDY

Katedra Marketingu, Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie
ul. Żołnierska 47, 72-210 Szczecin

Abstract. The article the method of determining the confidence intervals for the average value in the population. There have been also given the methodological guidelines intended to correct application of this method in natural and economic studies.

Słowa kluczowe: estymacja przedziałowa, metodyka wyznaczania przedziałów ufności dla wartości średniej w populacji, przykłady empiryczne.
Key words: interval estimation, methodology for determining the confidence intervals for the average value in the population, the empirical examples.

WSTĘP

Studenci i doktoranci piszący prace magisterskie i doktorskie o tematyce ekonomicznej lub przyrodniczej często mają trudności z poprawnym statystycznym opracowaniem danych empirycznych oraz z właściwą interpretacją uzyskanych wyników.

Celem niniejszego artykułu jest udzielenie praktycznych wskazówek osobom stosującym metody statystyczne w swoich pracach badawczych. Szczegółowej analizie poddane zostało zagadnienie estymacji przedziałów ufności dla wartości średniej populacji. Przedstawione rozważania mogą być także stosowane w przypadku innych zagadnień związanych z estymacją przedziałową (np. przedział ufności dla wariancji, wskaźnik struktury). W artykule zawarto również ogólne informacje o metodologii badań statystycznych, które powinny być przydatne przy stosowaniu modeli statystycznych.

Jednym z głównych zadań statystyki matematycznej jest wnioskowanie o właściwościach badanej zbiorowości (populacji generalnej) na podstawie jej fragmentu (podzbioru) – próby. Rozwój metod statystycznych prowadzi do uzyskania coraz pełniejszej informacji o całości na podstawie części tej całości. Tak jak w wielu dziedzinach nauki statystyka, w celu opisania własności cech realnej zbiorowości, wprowadza pewien teoretyczny model, który przekształcany przy wykorzystaniu praw rachunku prawdopodobieństwa pozwala badaczowi uzyskać wartościowe wnioski. Podstawowym narzędziem, za pomocą którego modeluje się cechy obiektów w populacji, jest pojęcie zmiennej losowej. Obserwacje doświadczalne możemy traktować jako realizacje wartości zmiennej losowej. Problem badania zbiorowości generalnej sprowadza się zatem do określenia cech zmiennej losowej na podstawie skończonego zbioru jej wartości.

ESTYMACJA PRZEDZIAŁÓW UFNOŚCI DLA ŚREDNIEJ – OGÓLNE UJĘCIE ZADANIA

Podstawowym parametrem zmiennej losowej (a co za tym idzie, populacji, którą opisuje) jest jej wartość średnia (wartość oczekiwana). Istnieją dwie metody szacowania średniej (i ogólniej – nieznanych parametrów populacji) – estymacja punktowa i estymacja przedziałowa. Estymacja punktowa daje możliwość oszacowania parametrów za pomocą liczb, nie podaje jednak dokładności tych oszacowań. Metody estymacji przedziałowej pozbawione są tej wady.

Wyznaczanie przedziału ufności dla średniej przebiega następująco: Badaną cechę populacji opisuje zmienna losowa X, która ma nieznaną wartość oczekiwaną równą m i skończoną wariancję. Na podstawie liczb $x_1, x_2, \dots, x_n$, które są wartościami cech wylosowanymi niezależnie od obiektów populacji (wartościami próby), należy wyznaczyć liczbową realizację przedziału, który ze z góry zadanym prawdopodobieństwem $1-\alpha$ pokrywa wartość średnią m. Próbę $x_1, x_2, \dots, x_n$ traktujemy jako realizację niezależnych zmiennych losowych $X_1, X_2, \dots, X_n$.

W przypadku, gdy założymy, że zmienne losowe $X_1, X_2, \dots, X_n$ mają rozkład normalny o wartości średniej równej *m,* otrzymujemy zależność:

$$P(\overline{X} - t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n-1}} < m < \overline{X} + t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n-1}}) = 1-\alpha \tag{1}$$

Zatem liczbowa postać przedziału ufności dla średniej, przy przyjętych założeniach, jest następująca:

$$(\overline{x} - t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n-1}}, \overline{x} + t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n-1}}) \tag{2}$$

Zwyczajowo przedział ufności dla średniej zapisuje się w postaci:

$$\overline{x} - t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n-1}} < m < \overline{x} + t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n-1}} \tag{3}$$

gdzie:

n – liczebność próby,

$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ – średnia arytmetyczna próby,

$s = \sqrt{s^2}$ – odchylenie standardowe próby, przy czym wariancja próby s^2 określona jest przez $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$, t_α – wartość spełniająca warunek: $P(-t_\alpha < t < t_\alpha) = 1-\alpha$ (odczytywana z tablic rozkładu t-Studenta dla α i n – 1 stopni swobody).

W przypadku, gdy liczebność próby jest duża (zwykle przyjmuje się, że próba jest duża, gdy $n > 30$, przedział ufności przyjmuje postać:

$$\overline{x} - u_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} < m < \overline{x} + u_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} \tag{4}$$

gdzie:

u_α – liczba spełniającą warunek: $F(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ (F – dystrybuanta rozkładu normalnego standaryzowanego).

MATERIAŁ I METODY. PRZYKŁADY EMPIRYCZNE

Metodykę wyznaczania wielkości próby badawczej pokażemy na przykładach.

Przykład 1. Jedną z ważniejszych charakterystyk zbóż jest zawartość białka w ich ziarnach. W celu oszacowania średniej zawartości białka w ziarnach pszenicy odmiany ‘Meteor’ wykorzystano metodę estymacji przedziałowej. Wylosowano w sposób niezależny n = 120 ziaren i przebadano je pod względem procentowej zawartości białka. Otrzymano średnią arytmetyczną $\overline{x}$ = 17, 2% i odchylenie standardowe s = 3,1%.

Ponieważ próba jest duża, należy przyjąć następującą postać przedziału ufności:

$$\overline{x} - u_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} < m < \overline{x} + u_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Jako współczynnik ufności przyjęto 1 – α = 0, 90. Wartość $u_\alpha = u_{0,10}$ obliczono z warunku: $F(u_{0,10}) = 1 - \frac{0,10}{2} = 0,95$. Korzystając z tablic dystrybuanty standaryzowanego rozkładu normalnego, otrzymano $u_{0,10}$ = 1,64. Zatem przedział ufności będzie miał postać:

$$17,2 - 1,64\frac{3,1}{\sqrt{120}} < m < 17,2 + 1,64\frac{3,1}{\sqrt{120}}$$

Po łatwych obliczeniach otrzymano:

$$16,7\% < m < 17,6\%$$

Widać, że rozpiętość otrzymanego przedziału jest równa 0,9%, co stanowi około 5% średniej arytmetycznej obliczonej z próby. Lewy koniec przedziału jest więc średnią arytmetyczną pomniejszoną o 2,5%, a prawy koniec – średnią arytmetyczną powiększoną o 2,5%. Wyznaczony przedział ufności można interpretować jako przedział wylosowany z populacji przedziałów, w której przeciętnie 9 na 10 przedziałów pokrywa nieznaną średnią procentową zawartość białka w ziarnach pszenicy odmiany ‘Meteor’.

Przykład 2. Wprowadzając do produkcji nowy typ urządzeń elektronicznych, postanowiono oszacować przedział ufności dla średniej temperatury, w której ulegają one zniszczeniu. Ze względu na wysoki koszt urządzeń uznano za niecelowe przeprowadzenie badań na dużej próbie. Dokonano n = 12 pomiarów; otrzymano następujące wyniki (w °C): 72,3, 69,8, 70,0, 68,5, 71,1, 73,2, 71,5, 69,4, 68,2, 72,1, 70,5, 69,1. Jako współczynnik ufności przyjęto 1 – α = 0,95.

Ponieważ próba jest mała, w pierwszym kroku należy sprawdzić hipotezę o normalności rozkładu temperatur, w których urządzenia ulegają zniszczeniu. W tym celu wykorzystano test Kołmogorowa (Krysicki i in. 2002). Przyjęto poziom istotności α = 0,10. Wykorzystując pakiet statystyczny Statgraf, otrzymano odpowiedź: Nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o normalności rozkładu temperatur powodujących zniszczenie urządzenia. Taki wynik weryfikacji hipotezy pozwala kontynuować procedurę wyznaczania przedziału ufności.

Ponieważ próba jest mała, jako przedział ufności należy przyjąć:

$$\overline{x} - t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n-1}} < m < \overline{x} + t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n-1}}$$

Obliczono średnią arytmetyczną próby oraz odchylenie standardowe próby, otrzymując: $\overline{x} = 70{,}9$°C, s = 1,48°C. Wartość $t_\alpha = t_{0,05}$ = 2,202 odczytano z tablic rozkładu t-Studenta dla $n - 1 = 11$ stopni swobody oraz $\alpha = 0{,}05$. Liczbowa postać przedziału ufności ma więc postać:

$$70{,}9 - 2{,}202\frac{1{,}48}{\sqrt{11}} < m < 70{,}9 + 2{,}202\frac{1{,}48}{\sqrt{11}}$$

Po wykonaniu obliczeń:

$$69{,}9°\mathrm{C} < m < 71{,}8°\mathrm{C}$$

Interpretacja wyznaczonego przedziału ufności jest analogiczna do interpretacji przedziału ufności z przykładu 1.

WNIOSKI

Na zakończenie podamy w formie uwag wskazówki metodyczne, które mogą być przydatne w pracach badawczych, w których szacuje się przedziały ufności dla wartości średniej.

Uwaga 1. Próba pobrana z populacji, na podstawie której szacuje się przedział ufności dla średniej, powinna być próbą reprezentatywną dla populacji. Elementy próby powinny być wylosowane zgodnie ze schematem losowania bez wracania, co oznacza, że każdy element populacji może w próbie pojawić się tylko raz.

Uwaga 2. Przypuśćmy, że w pewnych badaniach przy współczynniku ufności $1-\alpha$ wyznaczyliśmy przedział ufności $a < m < b$. Niepoprawne jest stwierdzenie, że z prawdopodobieństwem $1-\alpha$ wartość średnia m należy do wyznaczonego przedziału. Stwierdzenie to sugeruje, że m jest wartością losową. W rzeczywistości wartość średnia jest konkretną liczbą, której nie znamy. Przedział (a, b) pokrywa się z tą liczbą lub nie. Wartość poznawcza liczbowej realizacji przedziału ufności polega na tym, że wyznaczając przy danym współczynniku ufności $1-\alpha$ na podstawie wielu prób przedziały ufności, frakcja przedziałów, które pokrywają wartość średnią m, jest w przybliżeniu równa $1-\alpha$. Przedział ufności (a, b) możemy interpretować jako przedział, który został wylosowany z populacji, w której częstość występowania przedziałów pokrywających wartość średnią jest równa $1-\alpha$. Fakt ten, w sposób skrócony, można sformułować następująco: Przedział o końcach a i b z prawdopodobieństwem $1-\alpha$ pokrywa wartość średnią m populacji.

Uwaga 3. Im współczynnik ufności $1-\alpha$ jest bliższy 1, tym większe jest prawdopodobieństwo pokrycia przez przedział ufności nieznanej wartości średniej m (dla badacza jest to korzystne). Jednak zwiększając wartość współczynnika ufności, uzyskuje się coraz dłuższe przedziały ufności (dla badacza nie jest to korzystne, bo mniejsza jest wartość informacyjna takich przedziałów). Przy nadaniu współczynnikowi ufności wartości, należy więc dokonać rozsądnego kompromisu pomiędzy tymi przeciwstawnymi celami. Zwykle za współczynnik ufności przyjmuje się liczby: 0,90, 0,95, 0,99.

Uwaga 4. Jeżeli zebranie obserwacji nie jest trudne, należy do oszacowania przedziałów ufności pobierać dużą próbę. Postępowanie takie ma dwie zalety. Po pierwsze, wzrost liczebności próby powoduje skrócenie przedziałów ufności. Po drugie, ze względu na twierdzenie Lapunowa (Hellwig 1995) przedział ufności dla dużej próby możemy wyznaczyć nie tyko przy założeniu, że rozkład badanej cechy jest normalny, ale przy znacznie ogólniejszych założeniach, które na ogół są spełnione.

Uwaga 5. Jeżeli do oszacowania przedziału ufności dla średniej używamy małej próby (zbadanie próby dużej jest kosztowne, pracochłonne itp.), należy potwierdzić przypuszczenie, że obserwacje mają rozkład normalny. Do tego celu można zastosować test Kołmogorowa lub test Shapiro-Wilka (Krysicki i in. 2002). Testy te można przeprowadzić, wykorzystując statystyczne programy komputerowe. Próba może zostać użyta do oszacowania przedziału ufności, jeśli test statystyczny, na zadanym poziomie istotności α (zwykle za α przyjmujemy liczby: 0,01, 0,05, 0,10), da odpowiedź, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, że badana cecha ma rozkład normalny.

PIŚMIENNICTWO

Bednarski L., Borowiecki R., Duraj J., Kurtys E., Waśniewski T., Wersety B. 2003. Analiza ekonomiczna przedsiębiorstwa. Wrocław, Wydaw. AE.

Bubicki Z. 2005. Teoria i algorytmy sterowania. Warszawa, PWN.

Duda J.T. 2003. Modele matematyczne, struktury i algorytmy nadrzędnego sterowania komputerowego. Kraków, Wydaw. AGH.

Gawrońska-Nowak B., Walerysiak G. 2005. Decyzje ekonomiczne – ujęcie ilościowe. Warszawa, PWE.

Hellwig Z. 1995. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. Warszawa, PWN.

Krysicki W., Bartos J., Dyczka W., Królikowska K., Wasilewska M. 2002. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach. Cz. II. Statystyka matematyczna. Warszawa, PWN.

Maddala G.S. 2006. Ekonometria. Warszawa, PWN.

Matołka M. 2005. Metody ilościowe w ekonomii. Zesz. Nauk. AE Pozn. 64.

Mruk H., Pilarczyk B., Sojkin B., Szulce H. 1999. Podstawy marketingu. Poznań, Wydaw. AE.

Nowak A. 2007. Optymalizacja. Teoria i zadania. Gliwice, Wydaw. Politechniki Śląskiej.