

*Agnieszka Barczak*

## **METODA PROGRAMOWANIA LINIOWEGO. PRZYKŁAD ZASTOSOWANIA W ROLNICTWIE**

### **LINEAR PROGRAMMING METHOD. EXAMPLE OF APPLICATION IN AGRICULTURE**

Katedra Analizy Systemowej i Finansów, Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie  
ul. Klemensa Janickiego 31, 71-270 Szczecin, e-mail: agnieszka.barczak@zut.edu.pl

**Summary.** A method of linear programming plays an important role in the process of optimal decision making. Linear programming is a special case of mathematical programming which is used in a situation where both the objective function and the constraints are linearized. This method is applicable, inter alia, in the process of production planning. The paper presents an example application of the method for the production optimization of group of farms in the region of Pomerania and Masuria (according to the classification of Polish FADN). For the purpose of the study, data for the years 2004–2008 were used. The data concern group of farms specializing in animal breeding in a pasture-fed system, concentrate-fed animal breeding, variety of animal breeding as well as farms which cultivate simultaneously variety of crops and breeding. For the efficiency research, a non-parametric DEA method was chosen, which is based on linear programming and on the estimation of the efficiency limit. It is used for measurement of the relative efficiency of the units under study, in cases, where many inputs and outputs occur simultaneously.

**Słowa kluczowe:** efektywność, metoda DEA, optymalizacja produkcji, programowanie liniowe, typ rolniczy.

**Key words:** DEA method, efficiency, linear programming, production optimization, type of farming.

## **WSTĘP**

W każdej działalności realizowana jest zasada racjonalnego gospodarowania. Można także wyodrębnić w niej cel gospodarczy i środki służące do jego osiągnięcia. Jeżeli przy określonym nakładzie środków ustalony cel uzyskiwany jest w maksymalnym stopniu, to realizowana zasada ma największą efektywność. Drugi wariant zasady racjonalnego gospodarowania dotyczy sytuacji, w której określony efekt uzyskiwany jest przy minimalnym nakładzie środków (np. koszty produkcji) – zasada najmniejszego nakładu środków (Kryński 1971).

Zbudowanie optymalnego planu, pozwalającego na realizację zasady racjonalnego gospodarowania, wymaga zastosowania metod programowania matematycznego.

Programowanie matematyczne formułuje ogólne i szczegółowe warunki optymalności, definiuje algorytmy rozwiązywania zadań i ich zbieżność (Runka 2003). Jednym z działów programowania matematycznego jest programowanie liniowe dotyczące przypadku, w którym wszystkie funkcje są liniowe.

Celem niniejszego opracowania jest przedstawienie przykładu zastosowania metody programowania liniowego w celu optymalizacji procesu produkcji w wybranych grupach gospodarstw

rolnych. Do budowy modeli programowania liniowego wykorzystano dane udostępnione przez polski FADN – system zbierania i wykorzystywania danych rachunkowych z gospodarstw rolnych w latach 2004–2008. Badaniami objęto grupy gospodarstw (z Pomorza i Mazur) specjalizujących się w chowie zwierząt żywnych w systemie wypasowym, chowie zwierząt żywnych paszami treściwymi oraz w chowie różnych zwierząt, a także zajmujących się różnymi uprawami i chowem zwierząt. Zadania programowania liniowego rozwiązano z wykorzystaniem modułu Solver.

W celu sprawdzenia efektywności uzyskanych rozwiązań zastosowano nieparametryczną metodę DEA (Data Envelopment Analysis).

## METODY

Programowanie liniowe jest szczególnym przypadkiem programowania matematycznego w sytuacji, gdy zarówno funkcja celu, jak i warunki ograniczające mają postać liniową (Gburczyk i in. 1979)<sup>1</sup>.

Termin „programowanie liniowe” dotyczy zazwyczaj metod obliczania wykorzystywanych do określania modeli produkcji, które gwarantują maksymalizację zysku, minimalizację kosztów produkcji lub odpowiednich typów analizy agregatowej (Heady i Candler 1960, 1965).

Metodę programowania liniowego można nazwać pewnym sposobem wykonywania działań matematycznych, który pozwala na ustalenie optymalnych rozwiązań różnych problemów ekonomicznych. Jednak, aby to było możliwe, warunki tych problemów muszą być wyrażone w formie równań i nierówności liniowych. Również cel problemu musi być określony w postaci liniowej funkcji matematycznej (Gburczyk i in. 1979).

W praktyce gospodarczej spotyka się wiele sytuacji decyzyjnych, które można opisać z wykorzystaniem programowania liniowego. Według Hozera (1998): „Programowanie liniowe obejmuje teorię i metody rozwiązywania określonego rodzaju zadań, wymagających znalezienia zespołu wartości zmiennych, spełniających dane ograniczenia liniowe i maksymalizujących (lub minimalizujących) niektóre liniowe funkcje tych zmiennych” (s. 215).

Do najważniejszych równań, które ograniczają możliwości rozwiązań w zadaniach programowania liniowego, można zaliczyć (Kopeć i Nietupski 1980):

a) równania określające sposób rozdysponowania zasobów czynników produkcji:

- ziemi,
- pracy,
- stanowisk w budynkach inwentarskich;

b) równania określające bilanse pasz produkcji własnej gospodarstwa;

c) równania ustalające minimalne lub maksymalne rozmiary różnych gałęzi produkcji;

d) równania ustalające wzajemny stosunek rozmiarów związanych ze sobą gałęzi produkcji.

Należy jednak zaznaczyć, że niemożliwe jest uwzględnienie w modelu wszystkich warunków ograniczających. Dlatego należy dokonać dokładnej selekcji czynników i uwzględnić tylko te czynniki, które faktycznie są istotne.

---

<sup>1</sup> Początki metod programowania liniowego przedstawiają między innymi: Wołgin (1970) oraz Heady i Candler (1965).

Programem liniowym nazywa się zadanie o następującej postaci (Czerwiński 1977):

$$c_1x_1 + \dots + c_nx_n = \text{maksimum} \quad (1)$$

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i \quad (i = 1, \dots, p) \quad (2)$$

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i \quad (i = p + 1, \dots, p + q) \quad (3)$$

$$x_1, \dots, x_n \geq 0 \quad (4)$$

Rozwiązanie dopuszczalne (optymalne) to w interpretacji ekonomicznej pewien dopuszczalny (optymalny) plan działania bądź pewna decyzja dopuszczalna (optymalna).

Jeżeli w zadaniu programowania liniowego nie ma warunków określonych równaniami ( $q = 0$ ), to program liniowy ma postać standardową. Można go wtedy zapisać w postaci:

$$\mathbf{cx} = \text{maksimum} \quad (5)$$

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \quad (6)$$

$$\mathbf{x} \geq 0 \quad (7)$$

Jeżeli natomiast (oprócz warunków wskazujących, że zmienne mają przyjmować wartości nieujemne) nie ma w zadaniu warunków określonych nierównościami ( $p = 0$ ), to program ma postać kanoniczną zapisywaną w postaci:

$$\mathbf{cx} = \text{maksimum} \quad (8)$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (9)$$

$$\mathbf{x} \geq 0 \quad (10)$$

Należy przy tym zaznaczyć, że:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rn} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n) \quad (14)$$

Nieco inaczej zagadnienie programowania liniowego zapisuje Ignasiak (2001). Jeżeli przez  $D$  oznaczony zostanie zbiór dopuszczalnych decyzji, przez  $x$  oznaczona dowolna decyzja, a przez  $f$  – funkcja celu, to zadanie decyzyjne można zapisać w następującej postaci:

Znajdź taką decyzję dopuszczalną  $x^* \in D$ , że:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x^*) = \max \{f(x) \mid x \in D\}, \text{ jeżeli funkcja celu ma być maksymalizowana} \\ f(x^*) = \min \{f(x) \mid x \in D\}, \text{ jeżeli funkcja celu ma być minimalizowana} \end{array} \right. \quad (15)$$

Częściej używany, ale mniej dokładny zapis (Ignasiak 2001):

$$\begin{array}{ll} f(x) \rightarrow \max & f(x) \rightarrow \min \\ \text{dla } x \in D & \text{dla } x \in D \end{array} \quad (16)$$

W zadaniach programowania liniowego zachodzi jeden z 3 wykluczających się przypadków (Runka 2003):

- nie istnieje rozwiązanie dopuszczalne, tzn. układ wartości parametrów jest taki, że zadanie jest sprzeczne;
- istnieją wektory  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{y}$  takie, że  $\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$  jest rozwiązaniem dopuszczalnym zadania dla wszystkich  $\alpha \geq 0$ , gdzie wartość funkcji celu może być dowolnie mała w przypadku minimalizacji lub dowolnie duża w przypadku maksymalizacji; wartość funkcji celu jest więc nieograniczona;
- istnieje rozwiązanie optymalne  $\mathbf{x}^{(opt)}$  takie, że  $-\infty < \mathbf{c}^T \mathbf{x}^{(opt)} \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x}$  dla każdego rozwiązania dopuszczalnego  $\mathbf{x}$ .

Podstawową cechą (Runka 2003) rozwiązań zadań programowania liniowego, bez względu na postać układu ograniczeń, jest to, że:

- jeżeli istnieje rozwiązanie dopuszczalne, to istnieje również rozwiązanie bazowe dopuszczalne;
- jeżeli istnieje rozwiązanie optymalne, to istnieje również bazowe rozwiązanie optymalne.

W związku z powyższym plany produkcji spełniające warunki ograniczające i warunki brzegowe będą rozwiązaniem dopuszczalnym. Rozwiązaniem optymalnym będzie to (lub będą te) spośród rozwiązań dopuszczalnych, w przypadku którego (lub w przypadku których) funkcja celu przyjmuje wartość maksymalną (Kukuła 2005). Następnym etapem badań jest przeprowadzenie analizy efektywności otrzymanych rozwiązań z wykorzystaniem metody DEA.

DEA jest metodą bazującą na programowaniu liniowym, jak również na estymacji granicy efektywności. Wykorzystuje się ją do pomiaru względnej efektywności badanych jednostek w sytuacji, gdy jednocześnie występuje wiele nakładów i efektów (Barczak 2013).

Wyjściowe założenie metody DEA dotyczy koncepcji produktywności w sytuacji wielowymiarowej. Gdy do dyspozycji jest  $s$ -efektów i  $m$ -nakładów, efektywność obiektu ma postać (Rogowski 1996; Rusielik 2000):

$$\text{efektywność} = \frac{\sum_{r=1}^s u_r \text{efekt}_r}{\sum_{i=1}^m v_i \text{nakład}_i}$$

gdzie:

- $u_r$  – wagi określające ważność poszczególnych efektów,
- $v_i$  – wagi określające ważność poszczególnych nakładów.

Jedną z cech charakterystycznych metody DEA jest możliwość ich sprowadzenia do wielkości syntetycznych  $m$ -nakładów i  $s$ -efektów. Pozwala to na wyznaczenie współczynnika efektywności, który jest maksymalizowaną funkcją celu w modelu programowania liniowego (Czekaj i Ziółkowska 2009):

$$F(u, v) = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_r}{\sum_{i=1}^m v_i x_i} \rightarrow \max$$

gdzie:

- $x_i$  – nakłady,
- $y_r$  – efekty,

gdy jednocześnie spełnione są następujące warunki ograniczające (Rusielik 2000):

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \leq 1 \text{ dla } j = 0, 1, \dots, n \text{ oraz } u_r, v_i \geq 0$$

Istotne jest to, że metodą DEA w przypadku jednostek nieefektywnych wyznacza się efektywne wielkości nakładów, które pozwalają na osiągnięcie lepszego efektu.

## WYNIKI

Na podstawie powyższych założeń zbudowano zadania programowania liniowego, dla których funkcją celu jest maksymalizacja wartości produkcji grup gospodarstw rolnych w poszczególnych okresach. Liczebność poszczególnych grup przedstawia tab. 1.

Tabela 1. Liczebność badanych grup gospodarstw w latach 2004–2008

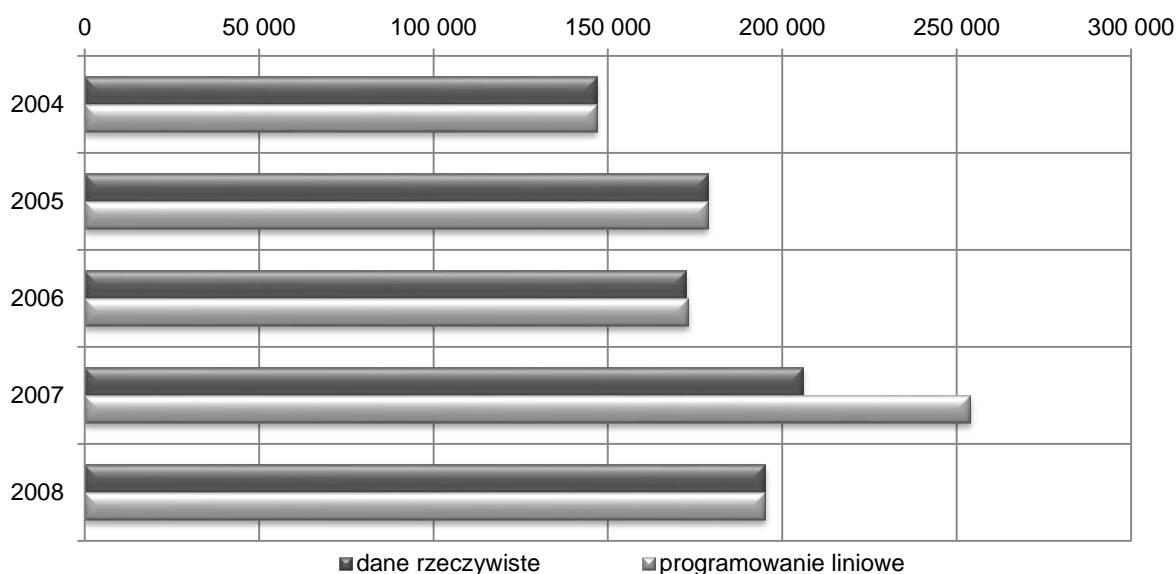
| Gospodarstwa  | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 |
|---|------|------|------|------|------|
| Specjalizujące się w chowie zwierząt żywionych w systemie wypasowym | 269  | 291  | 313  | 343  | 399  |
| Specjalizujące się w chowie zwierząt żywionych paszami treściwymi   | 191  | 197  | 185  | 204  | 163  |
| Prowadzące chów różnych zwierząt                                    | 238  | 238  | 224  | 224  | 206  |
| Prowadzące różne uprawy i chów zwierząt                             | 363  | 356  | 355  | 392  | 399  |

Źródło: opracowano na podstawie materiałów polskiego FADN.

W przypadku grupy gospodarstw specjalizujących się w chowie zwierząt żywionych w systemie wypasowym metoda programowania liniowego w całym badanym okresie pozwoliła na uzyskanie produkcji wyższej od rzeczywistej. W latach 2004–2005 i w roku 2008 programowanie liniowe sugeruje konieczność obniżenia nakładów na zatrudnienie, bez zmian nakładów na pozostałe czynniki produkcji; w 2004 roku 0,05% (70,40 zł) wzrostu wartości produkcji można uzyskać, redukując zatrudnienie o 2,15% (94,38 roboczogodzin), w roku kolejnym redukcja zatrudnienia o 0,87% (42,24 roboczogodzin) pozwoli na uzyskanie wartości produkcji wyższej o 0,03% (60,20 zł). W 2008 roku wzrost wartości produkcji wynoszący 0,003% (5,70 zł) można uzyskać, redukując zatrudnienie o 0,24%, czyli o 11,44 roboczogodzin. W roku 2006 metoda programowania liniowego sugeruje konieczność wzrostu nakładów kapitału o 1,85% (10 686,05 zł), co pozwoli na wzrost wartości produkcji o 0,33%, czyli o 573,40 zł. W roku kolejnym wzrost wartości produkcji wynoszący 23,34% (48 040,90 zł) można uzyskać, zwiększając nakłady na zatrudnienie o 30,28%, czyli o 1465,42 roboczogodzin (rys. 1).

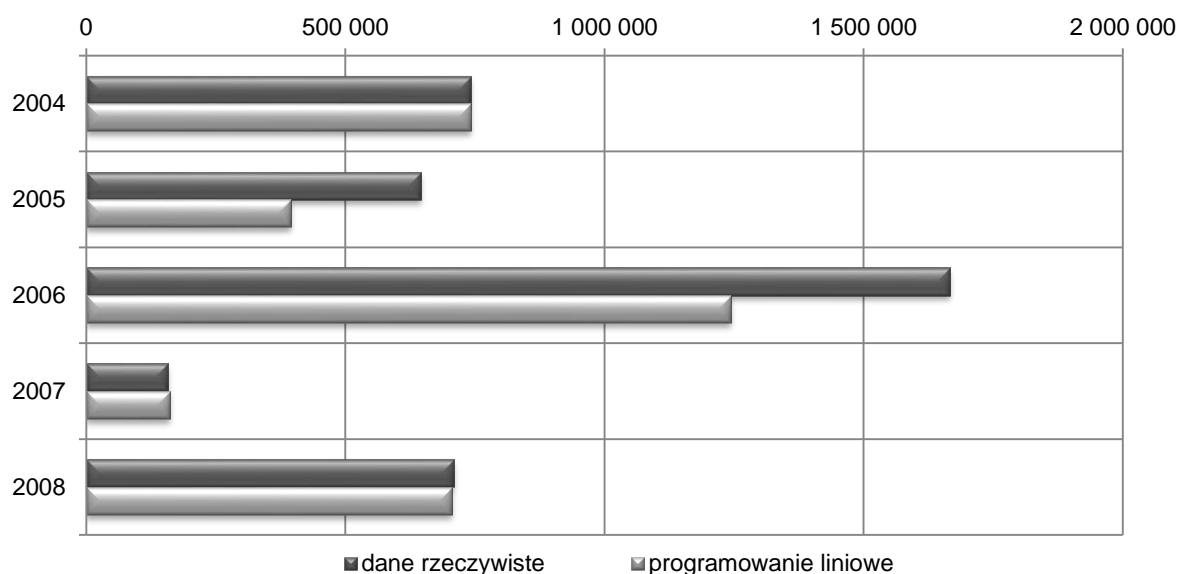
Analiza wartości otrzymanych metodą DEA wykazuje, że wszystkie rozwiązania wygenerowane metodą programowania liniowego są rozwiązaniami efektywnymi.

W przypadku grupy gospodarstw specjalizujących się w chowie zwierząt żywionych paszami treściwymi metoda programowania liniowego wygenerowała wartości produkcji większe od rzeczywistych tylko w dwóch okresach – w 2004 roku redukcja zatrudnienia o 10,16% (670,56 roboczogodzin) pozwoli na wzrost wartości produkcji wynoszący 0,007% (48,70 zł). W roku 2007 wzrost nakładów kapitału o 17,88% (437 692,20 zł) pozwoli na wzrost wartości produkcji o 2,30%, czyli o 3 603,00 zł (rys. 2).



Rys. 1. Wartości produkcji grupy gospodarstw specjalizujących się w chowie zwierząt żywionych w systemie wypasowym (rzeczywiste i wyznaczone z wykorzystaniem metody programowania liniowego)

Źródło: opracowano na podstawie danych FADN.

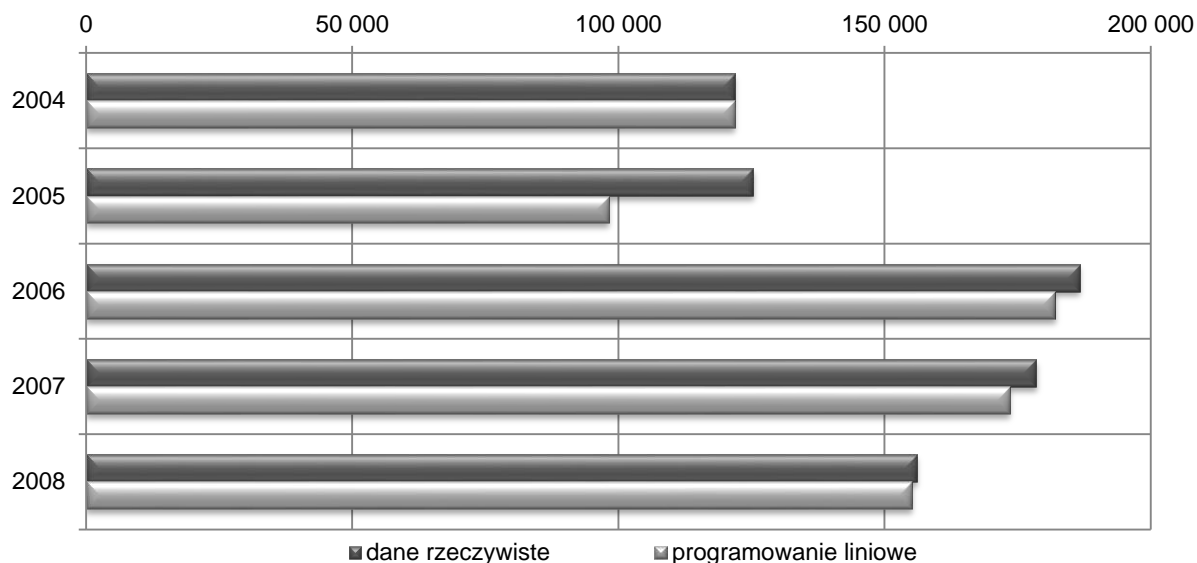


Rys. 2. Wartości produkcji grupy gospodarstw specjalizujących się w chowie zwierząt żywionych paszami treściwymi (rzeczywiste i wyznaczone z wykorzystaniem metody programowania liniowego)

Źródło: opracowano na podstawie danych FADN.

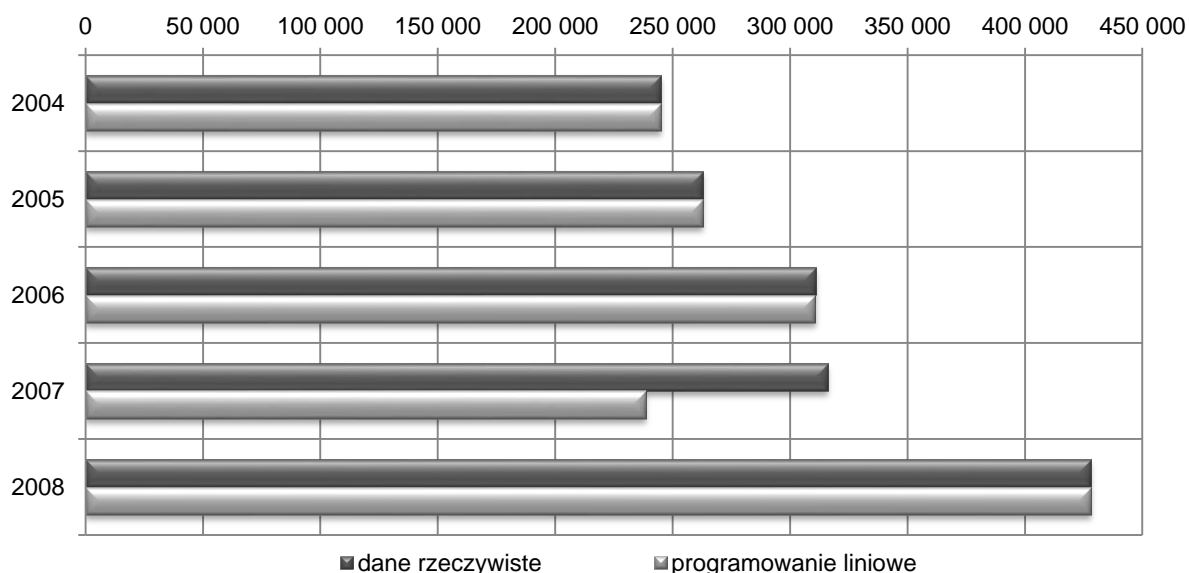
Nieparametryczna metoda DEA wykazała, że dla roku 2004 otrzymane rozwiązania są efektywne. W roku 2007 otrzymane rozwiązanie charakteryzuje się brakiem efektywności. W pozostałych okresach, pomimo wygenerowania przez metodę programowania liniowego wartości produkcji mniejszych od rzeczywistych, otrzymane rozwiązania okazały się efektywne.

W przypadku grupy gospodarstw prowadzących chów różnych zwierząt metoda programowania liniowego nie wygenerowała wartości produkcji większych od rzeczywistych (rys. 3). Jednakże metoda DEA wskazuje, że tylko dla roku 2005 i roku 2008 otrzymane rozwiązania są nieefektywne.



Rys. 3. Wartości produkcji grupy gospodarstw prowadzących chów różnych zwierząt (rzeczywiste i wyznaczone z wykorzystaniem metody programowania liniowego)

Źródło: opracowano na podstawie danych FADN.



Rys. 4. Wartości produkcji grupy gospodarstw prowadzących różne uprawy i chów różnych zwierząt (rzeczywiste i wyznaczone z wykorzystaniem metody programowania liniowego)

Źródło: opracowano na podstawie danych FADN.

W przypadku grupy gospodarstw prowadzących różne uprawy i chów różnych zwierząt metoda programowania liniowego wygenerowała wartości produkcji większe od rzeczywistych dla roku 2004 i roku 2008. Zgodnie z uzyskanymi wynikami w roku 2004 wzrost wartości produkcji wynoszący 0,005% (13,40 zł) można uzyskać, zwiększając nakłady zatrudnienia o 2,12%, czyli o 107,36 roboczogodzin. W roku 2008 zwiększenie nakładów zatrudnienia o 12,35% (815,1 roboczogodzin) pozwoli na wzrost wartości produkcji o 0,05%, czyli o 213,70 zł (rys. 4).

Analiza wartości otrzymanych nieparametryczną metodą DEA wskazuje, że zarówno w 2004, jak i w 2008 roku rozwiązania wygenerowane metodą programowania liniowego były efektywne.

## PODSUMOWANIE

Celem niniejszego opracowania było przedstawienie przykładu zastosowania metody programowania liniowego na potrzeby optymalizacji procesu produkcyjnego w wybranych grupach gospodarstw rolnych.

Metoda programowania liniowego we wszystkich badanych okresach wygenerowała wartości produkcji większe od rzeczywistych jedynie w przypadku grupy gospodarstw specjalizujących się w chowie zwierząt żywionych w systemie wypasowym. W tej grupie wyniki charakteryzujące się znaczącymi odchyleniami od wartości rzeczywistych uzyskano tylko w roku 2007.

W przypadku grupy gospodarstw specjalizujących się w chowie zwierząt żywionych paszami treściwymi i gospodarstw prowadzących różne uprawy metoda programowania liniowego wygenerowała wartości produkcji większe od rzeczywistych tylko dla dwóch okresów – w przypadku pierwszej z grup dla roku 2004 i roku 2007, w przypadku drugiej – dla 2004 i 2008 roku. Jedynie w przypadku grupy gospodarstw prowadzących chów różnych zwierząt zastosowana metoda nie pozwoliła na wyznaczenie wartości produkcji większej od rzeczywistej.

Wykorzystanie nieparametrycznej metody DEA do oceny efektywności rozwiązań wygenerowanych metodą programowania liniowego wskazuje, że w większości przypadków otrzymane rozwiązania charakteryzują się dużą efektywnością.

Reasumując, należy podkreślić, że metoda programowania liniowego odgrywa ważną rolę w procesie podejmowania decyzji optymalnych. Jest ona stosowana m.in. w planowaniu produkcji, dlatego może być też efektywnie wykorzystywana w zarządzaniu gospodarstwem rolnym oraz w planowaniu różnego rodzaju działalności (Trzaskalik 1997).

W przypadku grup gospodarstw rolnych, w celu uzyskania większej liczby wyników spełniających założenie maksymalizacji wartości produkcji, należałoby dokonać podziału na podgrupy tak, aby charakteryzowały się one jak najmniejszym zróżnicowaniem. Jednakże największą efektywność metody uzyskuje się, budując zadania programowania dla jednego gospodarstwa rolnego.

## PIŚMIENNICTWO

- Badania operacyjne w przykładach i zadaniach.** 2005. Red. K. Kukuła. Warszawa, PWN, 16.
- Badania operacyjne.** 2001. Red. E. Ignasiak. Warszawa, PWE, 19.
- Barczak A.** 2013. Efektywność produkcji rolniczej w wybranych grupach gospodarstw z regionu Pomorze i Mazury. Rocz. Nauk. SERiA 4 (15), 34–39.
- Czekaj T., Ziółkowska J.** 2009. Analiza efektywności ekonomicznej i produktywności, w: Analiza efektywności ekonomicznej i finansowej przedsiębiorstw rolnych powstałych na bazie majątku WRSP. Red. J. Kulawik. Warszawa, IERiGŻ PIB, 2009.
- Czerwiński Z.** 1977. Matematyka na usługach ekonomii. Warszawa, PWN, 152–153.
- Gburczyk S., Rembisz W., Zegar J.S.** 1979. Wybrane metody rachunku ekonomicznego w rolnictwie. Warszawa, SGPiS, 65–81.
- Heady E.O., Candler W.** 1960. Linear programming methods. Ames Iowa, The Iowa State University Press, 277–332.
- Heady E.O., Candler W.** 1965. Metody programowania liniowego, w: Metody matematyczne w ekonomice i planowaniu rolnictwa. Red. K. Rey, A. Woś. Warszawa, PWRiL, 37–38.
- Kopeć B., Nietupski T.** 1980. Podstawy i metody podejmowania decyzji w gospodarstwach rolnych. Warszawa, PWRiL, 33–34.
- Kryński H.E.** 1971. Matematyka dla ekonomistów. Warszawa, PWN, 500.



- Rogowski G.** 1996. Metody analizy i oceny działalności banku na potrzeby zarządzania strategicznego. Poznań, Wydaw. WSB.
- Runka H.J.** 2003. Optymalizacja w procesach gospodarczych. Poznań, Wydaw. AE Pozn., 57–59.
- Rusielik R.** 2000. Pomiar efektywności gospodarowania spółek Agencji Własności Rolnej Skarbu Państwa w latach 1996–1998 z wykorzystaniem metody DEA. Rozprawa doktorska. Warszawa, SGGW (maszynopis).
- Trzaskalik T.** 1997. Metody badań operacyjnych. Modelowanie optymalizacyjne. Łódź, Wydaw. Absolwent, 9.
- Wołgin L.N.** 1970. Optymalizacja. Warszawa, WNT.
- Zastosowanie programowania matematycznego w ekonomii.** 1998. Red. J. Hozer. Szczecin, Wydaw. USzczec. 215.

