FOLIA POMERANAE UNIVERSITATIS TECHNOLOGIAE STETINENSIS
Folia Pomer. Univ. Technol. Stetin., Oeconomica 2014, 313(76)3, 137–146

Maria Szmuksta-Zawadzka, Jan Zawadzki

MODELE WYRÓWNYWANIA WYKŁADNICZEGO W PROGNOZOWANIU ZMIENNYCH EKONOMICZNYCH ZE ZŁOŻONĄ SEZONOWOŚCIĄ

EXPONENTIAL SMOOTHING MODELS IN FORECASTING OF ECONOMIC VARIABLES WITH COMPLEX SEASONALITY

Studium Matematyki, Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie
al. Piastów 48, 70-311 Szczecin, e-mail: Maria.Szmuksta-Zawadzka@zut.edu.pl
Katedra Zastosowań Matematyki w Ekonomii, Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie
ul. Klemensa Janickiego 31, 71-270 Szczecin, e-mail: jan.zawadzki@zut.edu.pl

Summary. In the paper will be proposed application of exponential smoothing models in forecastting variables with complex seasonality, based on high-frequency time series, from which seasonal fluctuations were eliminated. Theoretical considerations will be illustrated by an empirical example.

Słowa kluczowe: dane oczyszczone z sezonowości, modele adaptacyjne, prognozowanie, złożona sezonowość.
Key words: complex seasonality, exponential smoothing models, forecasting, seasonal adjusted data.

WSTĘP

W modelowaniu i prognozowaniu na podstawie szeregów czasowych o wysokiej częstotliwości obserwowania wykorzystane są m.in. klasyczne modele szeregu czasowego ze złożoną sezonowością. W modelach tych wahania składowe opisywane są za pomocą zmiennych zero-jedynkowych lub wielomianów trygonometrycznych.

Addytywny model szeregu czasowego z liniowym trendem i stałymi wahaniami sezonowymi dla danych dziennych, uwzględniający wahania złożone o cyklu 12-miesięcznym (rocznym) i tygodniowym (7-dniowym), opisane za pomocą zmiennych zero-jedynkowych przyjmuje postać (por. np. Kufel 2010, Szmuksta-Zawadzka i Zawadzki 2011):

$$Y_t = \alpha_1 t + \alpha_0 + \sum_{i=1}^{12} b_{0i} M_{it} + \sum_{j=1}^{7} c_{0j} D_{jt} + U_t \tag{1}$$

przy warunkach:

$$\sum_{i=1}^{12} b_{0i} = \sum_{j=1}^{7} c_{0j} = 0 \tag{2}$$

gdzie:

M_{it} – miesiąc,

D_{jt} – dzień tygodnia,

U_t – składnik losowy.

Model (1) jest szczególnym przypadkiem modelu z asocjacją zmiennych zero-jedynkowych (por. Wiśniewski 1986).

Wahania o wymienionych wyżej długościach cykli mogą być opisane także za pomocą wielomianów trygonometrycznych zawierających składowe harmoniczne sinuso- i cosinusoidalne. Liczba harmonik będących sumą składowych sinuso- i cosinusoidalnych dla wahań o cyklu rocznym wynosi 6, tzn. równa jest połowie długości cyklu. W przypadku wahań o cyklu 7-dniowym jest ona równa połowie pomniejszonej o jedną długość tego cyklu – wynosi zatem 3.

Model harmoniczny ze złożoną sezonowością i z liniowym trendem można zapisać następująco (Szmuksta-Zawadzka i Zawadzki 2011):

$$Y_t = \alpha_1 t + \alpha_0 + \sum_{i=1}^{6}\left(a_{0i}\sin\omega_i t_m + b_{0i}\cos\omega_i t_m\right) + \sum_{j=1}^{3}\left(a_{0j}\sin\omega_j t + b_{0j}\cos\omega_j t\right) + U_t \qquad (3)$$

gdzie:

t_m = 1, 2,…,12,…, 12**r*, (*r* oznacza numer roku),

t = 1, 2,…,7,…, n.

W modelu (3) występują dwie zmienne oznaczające czas, przy czym zmienna t_m ma charakter pomocniczy i odnosi się do kolejnych miesięcy. Takie jej zdefiniowanie sprawia, że istnieje równoważność modelu z wielomianem trygonometrycznym (3) i modelu ze zmiennymi zero-jedynkowymi (1).

W prognozowaniu zmiennych ze złożoną sezonowością wykorzystuje się także modele hierarchiczne (por. np. Szmuksta-Zawadzka i Zawadzki 2012) oraz modele hybrydowe, w których składowe sezonowe opisywane są za pomocą dwóch różnych rodzajów modeli (Szmuksta-Zawadzka i Zawadzki 2014).

W literaturze z obszaru statystyki i ekonometrii można spotkać wiele przykładów zastosowania modeli adaptacyjnych do modelowania i prognozowania zjawisk, w których występuje jeden rodzaj wahań (np.: miesięczne, dekadowe). W pracy (Szmuksta-Zawadzka i Zawadzki 2012 a) dokonano syntetycznego przeglądu publikacji, ze szczególnym uwzględnieniem prac poświeconych prognozowaniu brakujących danych.

Przedstawiono w niej także dla wybranej zmiennej wyniki oraz analizę porównawczą dokładności prognoz otrzymanych różnymi metodami. Dla danych nieoczyszczonych (z sezonowością) najczęściej wykorzystywane były modele Holta-Wintersa (addytywny i multiplikatywny). Natomiast dla danych oczyszczonych z sezonowości metody wyrównywania wykładniczego: Browna (prosty, liniowy i kwadratowy) oraz liniowy model Holta, a także metody numeryczne. Prognozy ostateczne, w zależności od sposobu eliminacji wahań, otrzymuje się po przemnożeniu przez wskaźniki lub przez dodanie składników sezonowości.

Prognozy dla danych oczyszczonych mogą być także budowane jako sumy lub iloczyny wartości trendów szacowanych KMNK i odpowiednio składników lub wskaźników sezonowości. Tego rodzaju postępowanie określane jest mianem metody wskaźnikowej lub metody wskaźników sezonowości (por. Zeliaś i in. 2003, s. 90, Dittmann 2006, s. 85).

Celem artykułu jest próba wykorzystania modeli adaptacyjnych do modelowania i prognozowania zmiennej ze złożoną sezonowością dla danych dziennych, oczyszczonych z jednego lub dwóch rodzajów wahań sezonowych. Zakładać będziemy, że w szeregu czasowym dla

danych dziennych występują wahaniami o cyklu tygodniowym (7-dniowym) i rocznym (12--miesięcznym). Egzemplifikacją rozważań teoretycznych będzie modelowanie i prognozowanie dziennej sprzedaży paliw płynnych na stacji benzynowej X. Kształtowanie się zmiennej w okresie estymacyjnym będzie obejmować okres blisko dwuletni. Natomiast trzeci rok będzie okresem empirycznej weryfikacji prognoz.

OPIS METOD

W modelowaniu na podstawie danych w postaci szeregów czasowych, niezależnie od rodzaju modelu, wyróżnia się postać addytywną lub multiplikatywną. Podstawą rozróżnienia jest sposób nakładania się na siebie składowych szeregu czasowego. W pierwszym przypadku jest to suma, w drugim – iloczyn.

Ogólny zapis modelu addytywnego ze złożonymi wahaniami sezonowymi, oznaczonego symbolem (*a*), jest następujący:

$$Y_{t(a)} = P^{(a)}(t) + M^{(a)}(t) + D^{(a)}(t) + V_{t(a)} \tag{4}$$

gdzie:

$P^{(a)}(t)$ – trend,

$M^{(a)}(t)$ – składniki sezonowości o cyklu 12-miesięcznym,

$D^{(a)}(t)$ – składniki sezonowości o cyklu 7-dniowym,

$V_{t(a)}$ – składnik losowy.

Natomiast postać ogólna modelu multiplikatywnego, oznaczonego symbolem (*m*), wyraża się wzorem:

$$Y_{t(m)} = P^{(m)}(t) \cdot M^{(m)}(t) \cdot D^{(m)}(t) \cdot V_{t(m)} \tag{5}$$

gdzie:

$P^{(m)}(t)$ – trend,

$M^{(m)}(t)$ – wskaźniki sezonowości o cyklu 12-miesięcznym,

$D^{(m)}(t)$ – wskaźniki sezonowości o cyklu 7-dniowym,

$V_{t(m)}$ – składnik losowy.

Bezpośrednie wykorzystanie modeli Holta-Wintersa nie jest możliwe, ponieważ wymagałoby wprowadzenia dodatkowego, czwartego równania opisującego wahania o cyklu rocznym – uwzględniającego różną długość miesięcy.

Jak się wydaje, ze względów praktycznych, mogą wchodzić w grę m.in. modele Holta--Wintersa dla danych oczyszczonych, z których wyeliminowano wahania o cyklu rocznym (Y_t^*). Jeżeli eliminacji dokonano, odejmując składniki sezonowości ($M^{(a)}(t)$), to będzie to model w postaci addytywnej. W przypadku podzielenia wartości zmiennej prognozowanej przez wskaźniki sezonowości ($M^{(m)}(t)$) będziemy mieć do czynienia z postacią multiplikatywną.

Zapis modelu addytywnego Holta-Wintersa (A_HW) jest następujący (Pawłowski 1973):

$$m_t^* = \alpha\left(Y_t^* - c_{t-L}\right) + (1-\alpha)m_{t-1}^* \tag{6}$$

$$\delta_{1t}^* = \beta\left(m_t^* - m_{t-1}^*\right) + (1-\beta)\delta_{1t-1}^* \tag{7}$$

$$C_t^* = \gamma\left(Y_t^* - m_t^*\right) + (1-\gamma)C_{t-m}^* \tag{8}$$

$$0 \le \alpha, \beta, \gamma \le 1 \tag{9}$$

gdzie:

m_t^* – trend (operator rzędu pierwszego),

δ_{1t}^* – przyrost trendu,

C_t^* – składnik sezonowości.

Predyktor oparty na tym modelu przyjmuje postać:

$$\Pi_{A_HW}^* = m_{t_0}^* + \delta_{1t_0}^* h + C_{t_0 1+h}^* \tag{10}$$

gdzie:

t_0 – okres wyjściowy budowy prognoz,

h – horyzont prognozy.

Prognozę ostateczną, uwzględniającą wahania sezonowe, otrzymuje się na podstawie predyktora o postaci:

$$\Pi_{A_HW} = \Pi_{A_HW}^* + M^{(a)}(t) \tag{11}$$

Model multiplikatywny Holta-Wintersa (M_HW) można zapisać następująco:

$$m_t^* = \frac{\alpha Y_t^*}{C_{t-m}^*} + (1-\alpha)\left(m_{t-1}^* + \delta_{1t-1}^*\right) \tag{12}$$

$$\delta_{1t}^* = \beta\left(m_t^* - m_{t-1}^*\right) + (1-\beta)\delta_{1t-1}^* \tag{13}$$

$$C_t^* = \frac{\gamma Y_t^*}{m_t^*} + (1-\gamma)C_{t-m}^* \tag{14}$$

$$0 \le \alpha, \beta, \gamma \le 1. \tag{15}$$

Predyktory: wyjściowy i końcowy, wyrażają się wzorami:

$$\Pi_{M_HW}^* = \left(m_{t_0}^* + \delta_{1t_0}^* h\right)C_{t_0-m+h}^* \tag{16}$$

$$\Pi_{M_HW} = \Pi_{M_HW}^* \cdot M^{(m)}(t) \tag{17}$$

Natomiast dane, z których wyeliminowano dodatkowo także wahania o cyklu tygodniowym ($D^{(a)}(t)$ lub $D^{(m)}(t)$) oznaczać będziemy przez Y_t^{**}. Do budowy prognoz na ich podstawie mogą być wykorzystane na przykład proste modele Browna i modele Holta.

Równanie addytywnego prostego modelu Browna (A_BS) jest następujące:

$$m_t^{**} = \alpha Y_t^{**} + (1-\alpha)m_{t-1}^{**} \tag{18}$$

$$0 \le \alpha \le 1. \tag{19}$$

Predyktory wyjściowy i końcowy przyjmują postać:

$$\Pi_{A_BS}^{**} = m_{t_0}^{**} \tag{20}$$

$$\Pi_{A_BS} = \Pi_{A_BS}^{**} + M^{(a)}(t) + D^{(a)}(t). \tag{21}$$

Znaczenie poszczególnych symboli jest takie jak w modelach Holta-Wintersa.

W modelu multiplikatywnym równanie modelu prostego Browna (M_BS) różni się od postaci addytywnej jedynie sposobem wyznaczenia wartości oczyszczonych (Y_t^{**}) – są one ilorazami wartości zmiennej prognozowanej i wskaźników sezonowości o cyklu rocznym i tygodniowym.

Predyktory wyjściowy i końcowy są następujące:

$$\Pi_{M_BS}^{**} = m_{t_0}^{**} \tag{22}$$

$$\Pi_{M_BS)} = \Pi_{M_BS}^{**} * M^{(m)}(t) * D^{(m)}(t). \tag{23}$$

Addytywny model liniowy Holta (A_H) można zapisać (Pawłowski 1973):

$$m_t^{**} = \alpha Y_t^{**} + (1-\alpha)\left(m_{t-1}^{**} + \delta_{1t-1}^{**}\right) \tag{24}$$

$$\delta_{1t}^{**} = \beta(m_t - m_{t-1}) + (1-\beta)\delta_{1t-1}^{**} \tag{25}$$

$$0 \le \alpha, \beta \le 1. \tag{26}$$

Predyktory wyjściowy i końcowy wyrażają się wzorami:

$$\Pi_{A_H}^{**} = m_{t_0}^{**} + \delta_{1t_0}^{**} h \tag{27}$$

$$\Pi_{A_H} = \Pi_{A_H}^{**} + M^{(a)}(t) + D^{(a)}(t). \tag{28}$$

Równania postaci multiplikatywnej modelu Holta (M_H) różnią się, podobnie jak w przypadku modelu Browna, jedynie sposobem eliminacji wahań sezonowych.

Postacie predyktorów są następujące:

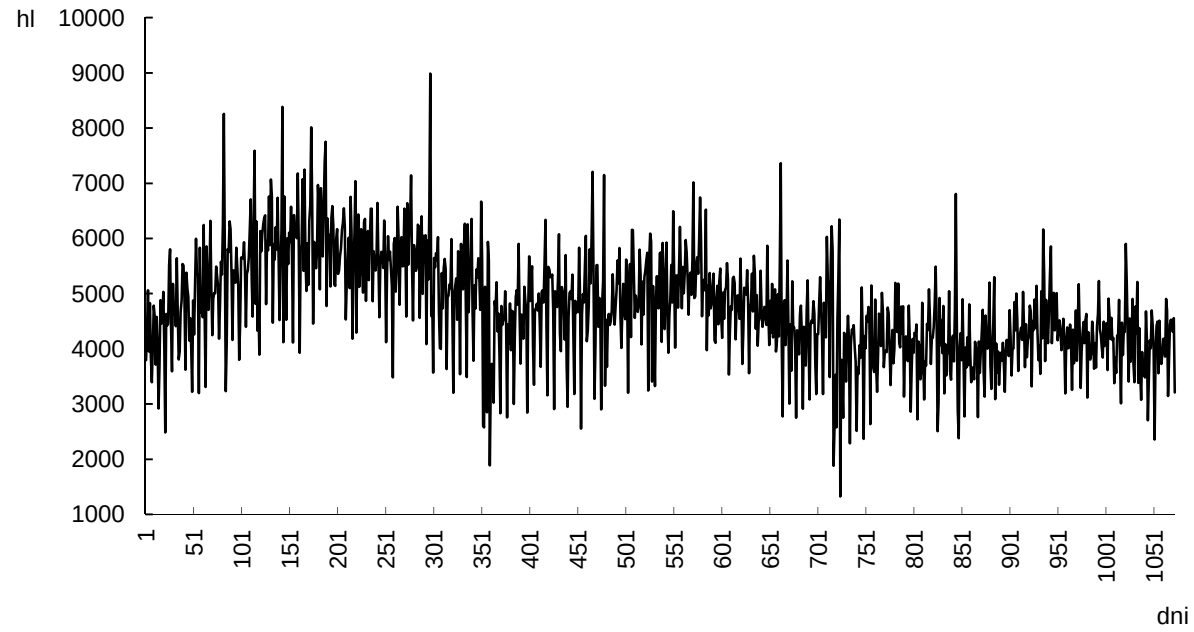
$$\Pi_{A_H}^{**} = m_{t_0}^{**} + \delta_{1t_0}^{**} h \tag{29}$$

$$\Pi_{M_H} = \Pi_{M_H}^{**} * M^{(m)}(t) * D^{(m)}(t). \tag{30}$$

Znaczenie poszczególnych symboli w zapisach modeli dla danych oczyszczonych z sezonowości, zapisanych za pomocą wzorów (18–30), jest takie same jak w modelach Holta-Wintersa (wzory 6–17).

PRZYKŁAD EMPIRYCZNY

Ilustracją przedstawionych wyżej rozważań o charakterze teoretycznym, jak zaznaczono we wstępie, będzie przykład empiryczny dotyczący modelowania i prognozowania dziennej sprzedaży paliw płynnych na stacji benzynowej X. Kształtowanie się zmiennej w okresie estymacyjnym obejmującym niepełne dwa lata (724 obserwacje od 7 stycznia pierwszego roku do 31 grudnia roku drugiego) zostało przedstawione na rysunku 1. Natomiast trzeci rok będzie okresem empirycznej weryfikacji prognoz.



Rys. 1. Wielkość sprzedaży paliw płynnych na stacji benzynowej X
Źródło: Baza Danych Katedry Zastosowań Matematyki w Ekonomii.

W tabeli 1 zestawiono oceny wskaźników i składników sezonowości o cyklach 12-miesięcznym i 7-dniowym. Ich oszacowania zostaną wykorzystane najpierw do eliminacji wahań sezonowych, a następnie wyznaczenia prognoz końcowych.

Tabela 1. Oceny wskaźników i składników sezonowości o cyklach 12-miesięcznym i 7-dniowym

Dzień	Wskaźniki sezonowe	Składniki sezonowe	Miesiąc	Wskaźniki sezonowe	Składniki sezonowe
Poniedziałek	1,028	131,30	styczeń	0,866	–936,19
Wtorek	1,015	71,09	luty	0,858	–1026,38
Środa	1,027	146,10	marzec	0,958	–216,37
Czwartek	1,108	535,76	kwiecień	0,987	–50,84
Piątek	1,035	200,12	maj	1,026	314,46
Sobota	0,829	–832,90	czerwiec	1,029	303,36
Niedziela	0,957	–251,46	lipiec	1,153	713,35
			sierpień	1,085	532,99
			wrzesień	1,022	191,27
			październik	1,113	517,72
			listopad	0,931	–306,09
			grudzień	0,971	–37,28

Źródło: opracowanie własne.

Z informacji zawartych w tabeli, odnoszących się do miesięcy, wynika, że wskaźniki sezonowości przyjmują wartości powyżej jedności dla miesięcy od maja do października. Dla pozostałych miesięcy są one niższe od jedności. Maksimum sezonowe przypada w lipcu, a minimum sezonowe w lutym. Amplituda wahań wynosi 29,5%. Składniki sezonowości przyjmują wartości dodatnie w tych samych miesiącach, w których wskaźniki były większe od jedności. Natomiast wartości ujemne w tych miesiącach, w których były one mniejsze od jedności. Maksymalne dodatnie odchylenie od trendu w przypadku lipca wynosi 713,35 l, a maksymalne ujemne przypada na luty i wynosi 1026,38 l. W przypadku dni tygodnia ocenami wskaźników sprzedaży paliw wyższymi od jedności charakteryzują się dni robocze – od poniedziałku do piątku. Oceny niższe od jedności otrzymano dla soboty i niedzieli. Maksymalną ocenę przyjął wskaźnik dla czwartku (1,108%), a minimalną dla soboty (0,828%). Amplituda ocen wskaźników sezonowości wynosi zatem 27,9%. Składniki sezonowości przyjęły wartości dodatnie w tych samych dniach, w których wskaźniki były wyższe od jedności. Natomiast wartości ujemne w dniach o niższych od jedności ocenach wskaźników. Maksymalną ocenę wynoszącą 535,76 l składnik przyjmuje dla czwartków (535,76 l), a minimalną dla soboty (–832,90 l). Zatem amplituda ocen składników sezonowości wynosi 1368,66 l. Zamieszczone w tabeli oceny wskaźników i składników sezonowości zostaną wykorzystane do eliminacji wahań sezonowych. Szeregi czasowe oczyszczone z wahań o cyklu rocznym (Y_t^*) posłużyły do budowy prognoz na podstawie modeli Holta-Wintersa o postaciach multiplikatywnej i addytywnej. Natomiast zmienna Y_t^{**}, z której wyeliminowano obydwa rodzaje wahań, będzie podstawą budowy prognoz na podstawie prostych modeli Browna i modeli Holta.

W modelowaniu i prognozowaniu adaptacyjnym zostały wykorzystane szeregi czasowe oczyszczone z sezonowości rocznej (Y_t^*) oraz z sezonowości rocznej i tygodniowej (Y_t^{**}).

W pierwszym przypadku były to modele Holta-Wintersa w postaci addytywnej i multiplikatywnej, a w drugim modele: prosty Browna i Holta o tych samych postaciach.

W tabeli 2 zestawiono modele addytywne i multiplikatywne o „optymalnych" wartościach stałych wygładzania. Modele te charakteryzowały się minimalnymi ocenami błędów względnych wartości wyrównanych (WW) lub błędów prognoz *ex post* (PROG) obliczonych dla okresu empirycznej weryfikacji prognoz dla horyzontu h = 348 dni. Analiza porównawcza dwóch rodzajów błędów pozwoli odpowiedzieć na pytanie: „Czy otrzymanie minimalnych ocen błędów wartości wyrównanych „gwarantuje" uzyskanie najbardziej dokładnych prognoz?". Niższe z ocen danego rodzaju błędów wyróżnione zostały „tłustym" drukiem.

Tabela 2. Minimalne oceny średnich błędów względnych wartości wyrównanych i prognoz *ex post* oraz optymalne wartości stałych wygładzania

Model	Miernik dotyczy	Stałe wygładzania			MAPE(%)	
		α	β	γ	WW	PROG
Modele addytywne						
A_BS	WW	0,07			**11,96**	16,17
	PROG	0,22			12,32	**14,86**
A_H	WW	0,1	0,1		**14,03**	123,8
	PROG	0,03	0,08		25,09	**13,29**
A_HW	WW	0,07	0,01	0,1	**10,83**	14,95
	PROG	0,01	0,07	0,02	12,91	**13,18**
A_Kl	.				14,59*	13,09
Modele multiplikatywne						
M_BS	WW	0,04			**15,76**	16,66
	PROG	0,38			17,32	**12,14**
M_H	WW	0,1	0,1		**17,7**	89,23
	PROG	0,1	0,02		22,88	**11,65**
M_HW	WW	0,06	0,01	0,01	**10,88**	12,21
	PROG	0,06	0,01	0,03	12,07	**11,41**
M_Kl					16,08*	12,70

* współczynnik zmienności losowej.

Źródło: opracowanie własne.

Z informacji zawartych w tabeli 2 wynika, że odpowiedź na postawione wyżej pytanie nie jest pozytywna. Oznacza to, że kryterium wyboru modelu dla celów prognozowania ekstrapolacyjnego nie mogą być minimalne oceny błędów wartości wyrównanych, lecz błędy prognoz *ex post*.

Modele otrzymane dla minimalnych ocen obu mierników różnią się stałymi wygładzania, przy czym niekiedy różnice te są bardzo duże. Widoczne jest to przede wszystkim w przypadku modeli Holta, dla których kilkunastoprocentowym ocenom błędów wartości wyrównanych odpowiadają wielokrotnie wyższe błędy prognoz *ex post,* wynoszące dla postaci addytywnej i multiplikatywnej odpowiednio: 123,8% oraz 89,23%. Dla pozostałych modeli różnice między ocenami błędów nie przekraczają 5,18 p.p.

Tabela zawiera ponadto, zamieszczone w celach porównawczych, oceny współczynników zmienności losowej oraz błędy prognoz *ex post*, otrzymane dla modeli klasycznych: z liniowym trendem i stałymi składnikami sezonowymi o cyklu rocznym i tygodniowym (A_Kl) oraz z trendem wykładniczym o stałej stopie wzrostu i relatywnie stałych wahaniach sezonowych (M_Kl).

Z analizy optymalnych wartości stałych wygładzania dla dwuparametrowych modeli Holta oraz trzyparametrowych modeli Holta-Wintersa wynika, że wszystkie stałe wyrównywania przyjmują wartości nieprzekraczające 0,1. Oznacza to, że najnowszym obserwacjom lub składowym nadawane są wagi nieprzekraczające 10%, a więc prognozowane zjawisko charakteryzuje się stosunkowo dużym stopniem inercji.

Minimalną ocenę prognoz błędów wartości wyrównanych (WW), wynoszącą 12,07%, otrzymano dla predykatora opartego na multiplikatywnej postaci modelu Holta-Wintersa (M_HW) o stałych wygładzania wynoszących odpowiednio: $\alpha = 0{,}06$; $\beta = 0{,}01$ oraz $\gamma = 0{,}01$. Oceny błędów poniżej 13% otrzymano także dla postaci addytywnej prostego modelu Browna (A_BS) dla $\alpha = 0{,}22$ oraz addytywnego modelu Holta-Wintersa (A_HW) o stałych wyrównywania: $\alpha = 0{,}07$, $\beta = 0{,}01$, $\gamma = 0{,}10$. Oceny błędów otrzymane na podstawie wyżej wymienionych modeli są niższe od współczynnika zmienności losowej klasycznego modelu addytywnego (14,59%). Zwracają uwagę bardzo wysokie, przekraczające 22%, oceny błędów WW otrzymane dla obu postaci modelu Holta. Z informacji zamieszczonych w tabeli wynika, że najniższą ocenę błędu prognoz ekstrapolacyjnych (PROG), wynoszącą 11,41%, otrzymano, podobnie jak dla wartości wyrównanych, dla predyktora opartego na multiplikatywnej postaci modelu Holta-Wintersa (M_HW), ale dla wartości stałej wygładzania γ wynoszącej 0,03. Natomiast dla danych z podwójnie wyeliminowaną sezonowością (Y_t^{**}) najniższą ocenę błędu prognoz *ex post* (11,65%) otrzymano dla modelu multiplikatywnego Holta (M_H) ze stałymi wygładzania wynoszącymi odpowiednio: 0,10 i 0,02.

Z tabeli wynika także, że oceny błędów prognoz ekstrapolacyjnych (PROG) dla najlepszych modeli multiplikatywnych są od 4,4% do 10,2% niższe od średniego względnego błędu prognoz tego rodzaju prognoz, otrzymanych na podstawie klasycznego modelu multiplikatywnego ze złożoną sezonowością (M_Kl), wynoszącego 12,70%.

Dokładność prognoz dla modeli multiplikatywnych jest o około 1,5–3,0 p.p. wyższa od dokładności dla postaci addytywnej. Ocena błędu średniego prognoz otrzymanego na podstawie predykatora opartego na modelu klasycznym jest wyższa od 0,09 p.p. do 1,77 p.p od ocen otrzymanych dla addytywnych modeli wyrównywania wykładniczego. Na uwagę zasługuje także otrzymanie znacznie niższych, niż dla wartości wyrównanych, ocen błędów prognoz ekstrapolacyjnych otrzymanych dla obu postaci modelu Holta. Oceny te są tylko nieznacznie wyższe od ocen otrzymanych dla modeli najlepszych.

PODSUMOWANIE

Z przeprowadzonych w pracy badań wyprowadzić można następujące wnioski:

1. W przypadku modelowania i prognozowania zmiennych o niezbyt silnej dynamice „optymalne" wartości stałych wygładzania w modelach Holta i Holta-Wintersa przybierają wartości bliskie zeru.
2. Kryterium wyboru modelu dla celów prognozowania nie mogą być przeciętne błędy względne wartości wyrównanych, lecz błędy względne prognoz *ex post*.

3. Wyższą dokładnością prognoz charakteryzowały się modele multiplikatywne. Spośród nich minimalną ocenę błędu otrzymano dla modelu Holta-Wintersa dla danych, z których wyeliminowano sezonowość roczną.
4. Błędy prognoz *ex post* otrzymanych na podstawie predyktorów multiplikatywnych były od 4% do 10% niższe od błędów prognoz otrzymanych na podstawie najlepszego modelu klasycznego.

W toku badań wykazano, że modele wyrównywania wykładniczego dla danych oczyszczonych z sezonowości mogą być użytecznym narzędziem prognozowania zmiennych ekonomicznych ze złożoną sezonowością.

PIŚMIENNICTWO

Dittmann P. 2006. Prognozowanie w przedsiębiorstwie. Metody i ich zastosowanie. Kraków Wolters Kluwer Polska. ISBN 83-77484-060-9.

Kufel T. 2010. Ekonometryczna analiza cykliczności procesów gospodarczych o wysokiej częstotliwości obserwowania. Toruń. Wydaw. Nauk. Uniw. Mikołaja Kopernika. ISBN 978-83-231-2471-9.

Pawłowski Z. 1973. Prognozowanie ekonometryczne. Warszawa. PWN.

Szmuksta-Zawadzka M., Zawadzki J. 2011. Zastosowanie modelowania ekonometrycznego w prognozowaniu brakujących danych w szeregach o wysokiej częstotliwości, w: Pr. Nauk. Uniw. Ekon. Wrocław. Ekonometria 34, 303–313.

Szmuksta-Zawadzka M., Zawadzki J. 2012. O metodzie prognozowania brakujących danych w dziennych szeregach czasowych z lukami systematycznymi, w: metody ilościowe w badaniach ekonomicznych (Quantitative Methods in Economics). T. 13, 3. 202–212.

Szmuksta-Zawadzka M., Zawadzki J. 2012 a. Z badań nad metodami prognozowania na podstawie niekompletnych szeregów czasowych z wahaniami okresowymi (sezonowymi), w: Prz. Stat. – nr spec. 1. Warszawa, 140–154.

Szmuksta-Zawadzka M., Zawadzki J. 2014. Wykorzystanie modeli „hybrydowych" w prognozowaniu brakujących danych w szeregach ze złożoną okresowością (sezonowością), w: Matematyka i informatyka na usługach ekonomii: rozważania ogólne. Red. W. Jurek. Poznań. Wydaw. Uniw. Ekon. Poznań, 72–83. ISBN 978-83-7417-806-8.

Wiśniewski J. 1986. Ekonometryczne badanie zjawisk jakościowych. Studium metodologiczne. Toruń. Uniw. Mikołaja Kopernika. ISBN 83-231-0065-9.

Zeliaś A., Pawełek B., Wanat S. 2003, Prognozowanie ekonomiczne. Teoria. Przykłady. Zadania. Warszawa. PWN. ISBN 83-0114043-7.