

Joanna PERZYŃSKA

WYBRANE MIERNIKI TRAFNOŚCI PROGNOZ *EX POST* W WYZNACZANIU PROGNOZ KOMBINOWANYCH

SELECTED MEASURES OF THE *EX POST* FORECAST ACCURACY IN DETERMINING COMBINED FORECASTS

Katedra Zastosowań Matematyki w Ekonomii, Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny
w Szczecinie, ul. Klemensa Janickiego 31, 71-270 Szczecin, e-mail: joanna.perzynska@zut.edu.pl

Summary. The article raises the problem of evaluation of the accuracy of the quantitative forecasts by selected measures of ex-post errors and also shows how to use them to determine the combined forecasts. An illustration of theoretical considerations is empirical example, which sets the individual and combined forecasts of microeconomic variable characterized by the presence of seasonal fluctuations. Weights of combined forecasts are estimated by optimization relative ex-post measures (MAPE and wMAPE) and the classic method of variance-covariance. The study indicates that, in the prevalence of moderate seasonal fluctuations, classic measure is a better criterion for assessing forecast accuracy than the weighted measure. In addition, most of forecasts combination obtained by minimizing the measure wMAPE has a higher accuracy than individual forecasts and combination determined by other methods.

Słowa kluczowe: prognozy kombinowane, średni absolutny błąd procentowy, wagi prognoz, wahania sezonowe, ważony średni absolutny błąd procentowy.

Key words: combined forecasts, mean absolute percentage error, seasonal fluctuations, weighted mean absolute percentage error, weights of forecast.

WSTĘP

Wyznaczenie prognozy wymaga wykonania wielu czynności składających się na ogólny schemat tzw. postępowania prognostycznego. Poszczególne etapy powinny być realizowane w określonej kolejności – począwszy od sformułowania zadania prognostycznego, na ocenie trafności prognozy kończąc (zob. Dittmann 2003; Prognozowanie gospodarcze 2005). Trafność prognoz ilościowych określa się głównie za pomocą mierników błędów *ex post*. Najczęściej wykorzystywany jest miernik względny MAPE. Należy jednak zwrócić uwagę, że jest on wrażliwy na wahania sezonowe prognozowanej zmiennej, zwłaszcza te o silnym natężeniu. W takim przypadku Szmuksta-Zawadzka i Zawadzki (2012) do oceny trafności prognoz proponują stosowanie ważonego miernika względnego wMAPE (zob. również Oesterreich 2015).

Informacje o kształtowaniu się błędów *ex post* prognoz indywidualnych można także wykorzystać do szacowania wag prognoz kombinowanych. W artykule przedstawiony zostanie przykład empiryczny, w którym zostaną wyznaczone prognozy zmiennej charakteryzującej się występowaniem wahań sezonowych o umiarkowanym natężeniu. Wagi prognoz kombinowanych

oszacowane zostaną metodą optymalizacji obu mierników względnych oraz klasyczną metodą wariancji–kowariancji. W toku badań zweryfikowana zostanie hipoteza mówiąca o tym, że prognozy otrzymane w wyniku optymalizacji miernika wMAPE charakteryzują się większą trafnością niż prognozy indywidualne oraz prognozy kombinowane, wyznaczone za pomocą pozostałych metod.

METODY

Po przeprowadzeniu pomiaru rzeczywistej wartości prognozowanej zmiennej wyznacza się zrealizowany błąd prognozy (błąd *ex post*), a jego wartość oblicza się dla każdego okresu / / momentu t na podstawie wzoru:

$$e_t = y_t - f_t \quad (1)$$

gdzie:

y_t – realizacja prognozowanej zmiennej Y w okresie / momencie t ($t = n + 1, n + 2, \dots, n + j$),
 f_t – wartość prognozy zmiennej Y na okres / moment t .

Na podstawie błędów prognoz *ex post*, oszacowanych dla kolejnych okresów, wyznacza się błędy średnie, charakteryzujące przedział empirycznej weryfikacji prognoz za pomocą jednej liczby (zob. Zeliaś 1997; Załuska 2000; Kwiatkowska-Ciotucha i Załuska 2002; Dittman 2003). Najczęściej stosowaną syntetyczną miarą jakości prognoz *ex post* jest miernik względny:

$$MAPE = \frac{1}{j} \sum_{t=n+1}^{n+j} \frac{|y_t - f_t|}{y_t} \cdot 100\% \quad (2)$$

Jest to tzw. średni absolutny błąd procentowy (*mean absolute percentage error*). Informuje on, o ile procent średnio prognozy odchylają się od rzeczywistych wartości prognozowanej zmiennej. Cechuje go łatwość zrozumienia i interpretacji uzyskanych wyników oraz duża przydatność decyzyjna (Armstrong i Collopy 1992). Miernik ten jest jednak wrażliwy na małe wartości prognozowanej zmiennej, przy takim samym module wartości zrealizowanego błędu *ex post*, występującego w liczniku wzoru (2), wyżej ocenia prognozy przeszacowane niż niedoszacowane. Aby uniknąć tego problemu w przypadku prognozowanej zmiennej z wahaniami sezonowymi, Szmuksta-Zawadzka i Zawadzki (2012) proponują stosowanie ważonego miernika względnego:

$$wMAPE = \sum_{t=n+1}^{n+j} \left(|y_t - f_t| / \sum_{t=n+1}^{n+j} y_t \right) \cdot 100\% \quad (3)$$

Oba mierniki względne można również wykorzystać do oceny trafności prognoz kombinowanych, a także do wyznaczenia ich wag. Prognoza kombinowana ma postać średniej ważonej:

$$f_{cT} = \sum_{i=1}^m \lambda_i f_{iT} \quad (4)$$

gdzie:

$i = 1, 2, \dots, m$ ($m \geq 2$),

m – liczba prognoz składowych prognozy kombinowanej,

f_{iT} – i -ta prognoza indywidualna zmiennej Y na okres / moment T ($T > n$),

λ_i – waga i -tej prognozy indywidualnej ($0 \leq \lambda_i \leq 1$).

Klasyczna metoda szacowania wag prognozy (4) – metoda wariancji-kowariancji (VC), zaproponowana przez Batesa i Grangera (1969), a uogólniona przez Grangera i Newbolda (1974), polega na minimalizacji wariancji błędu prognozy kombinowanej (4). Szacując macierz wariancji–kowariancji Σ na próbie, otrzymujemy estymator wektora współczynników kombinacji o postaci:

$$\hat{\lambda} = \frac{\hat{\Sigma}^{-1}i}{i' \hat{\Sigma}^{-1}i} \quad (5)$$

gdzie:

$$\hat{\Sigma}_{ij} = \sum_{t=T-k}^{T-1} e_{it} e_{jt} \quad (6)$$

$$\lambda = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_m],$$

$$i = [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1],$$

$$j = 1, 2, \dots, m,$$

$$e_{iT} - \text{błąd } ex \text{ post prognozy } f_{iT}.$$

Kaźmierska-Zatoń i Zatoń (2010) zaproponowali, aby wagi prognozy kombinowanej oszacować w procesie minimalizacji wartości jej błędu *ex post* lub optymalizacji innego przyjętego kryterium. W przedstawionym w cytowanej pracy przykładzie empirycznym zastosowano między innymi metodę minimalizacji miernika względnego MAPE.

Zadanie optymalizacji jednokryterialnej dla prognozy f_{ct} można zapisać w postaci:

$$k(f_{ct}(\lambda)) \rightarrow \min_{\lambda} \left(\text{lub } \max_{\lambda} \right) \quad (7)$$

przy warunkach:

$$\begin{cases} 0 \leq \lambda_i \leq 1 & (i = 1, 2, \dots, m) \\ \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \end{cases} \quad (8)$$

gdzie:

k – funkcja celu (kryterium oceny jakości prognozy kombinowanej),

$f_{ct}(\lambda)$ – wygasła prognoza kombinowana na okres / moment t o nieznanym wagach λ_i ,

$t = n + 1, n + 2, \dots, T-1$,

λ – wektor szukanych wag,

n – liczba obserwacji wykorzystanych do budowy indywidualnych modeli prognostycznych.

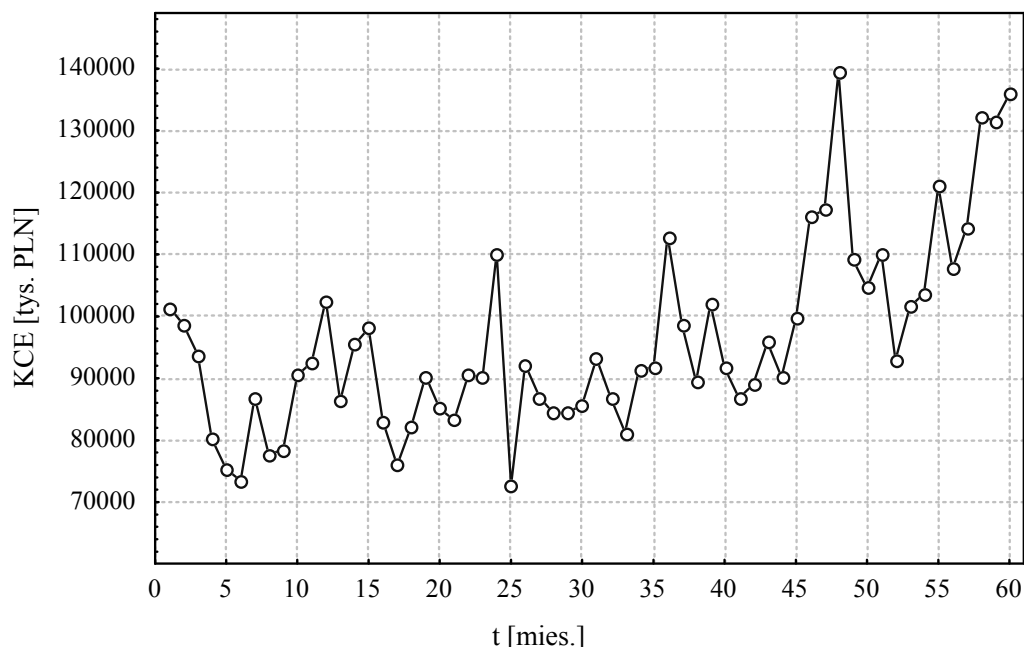
Warunki ograniczające (8) definiują zbiór dopuszczalnych decyzji (wartości poszukiwanych wag). Decyzje należące do tego zbioru są oceniane na podstawie wartości funkcji celu, którą stanowi wybrane kryterium oceny jakości prognozy kombinowanej. Argumentem funkcji celu jest prognoza kombinowana, będąca średnią ważoną wygasłych prognoz indywidualnych. Jeżeli jako kryterium przyjmujemy *MAPE* lub *wMAPE*, to rozwiązanie zadania optymalizacji polegać będzie na wyznaczeniu wartości wag λ_i , prognozy kombinowanej, dla których funkcja celu (7) osiąga minimum:

$$\sum_{t=1}^{T-1} \left(\left| y_t - \sum_{i=1}^m \lambda_i f_{it} \right| / y_t \right) \rightarrow \min_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m} \quad (9)$$

$$\sum_{t=1}^{T-1} \left(\left| y_t - \sum_{i=1}^m \lambda_i f_{it} \right| / \sum_{t=1}^{T-1} y_t \right) \rightarrow \min_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m} \quad (10)$$

MATERIAŁ

Modelowaniu predyktywnemu i prognozowaniu poddano koszty całkowite produkcji energii elektrycznej i ciepłej (KCE) w elektrowni B. Szereg czasowy wartości zmiennej KCE obejmował 60 miesięcy. Kształtowanie się prognozowanej zmiennej przedstawiono na rys.1.



Rys. 1. Kształtowanie się zmiennej KCE

Prognozowana zmienna charakteryzuje się występowaniem trendu oraz wahań sezonowych. W tabeli 1 zestawiono oceny wskaźników sezonowości zmiennej KCE, wyznaczone dla okresu estymacyjnego $t = 1, 2, \dots, 36$, przy założeniu multiplikatywnego charakteru wahań sezonowych.

Tabela 1. Oceny wskaźników sezonowości [%] zmiennej KCE w okresie estymacyjnym $t = 1, 2, \dots, 36$

Miesiąc	Wskaźnik sezonowości	Miesiąc	Wskaźnik sezonowości	Miesiąc	Wskaźnik sezonowości
I	95,93	V	90,14	IX	92,01
II	103,14	VI	92,90	X	102,86
III	106,07	VII	102,17	XI	103,28
IV	95,15	VIII	94,42	XII	121,93

Ekstremalne oceny wskaźników sezonowości zmiennej KCE przypadają na grudzień (maksimum) i maj (minimum); różnica pomiędzy nimi wynosi 31,79 punktu procentowego, co świadczy o umiarkowanym natężeniu wahań sezonowych prognozowanej zmiennej.

PROCEDURA BADAWCZA

Proces modelowania i prognozowania zmiennej KCE przebiegał w pięciu etapach. W pierwszym etapie, na podstawie danych pochodzących z okresu estymacyjnego obejmującego 36 obserwacji ($t = 1, 2, \dots, 36$), oszacowano modele należące do sześciu klas;

są to: klasyczne (K1) oraz hierarchiczne (K2) modele szeregu czasowego ze stałą i zmienną sezonowością, klasyczne (K3) i hierarchiczne (K4) modele przyczynowo-opisowe ze zmieniającymi się sezonowo parametrami, modele Holta-Wintersa (K5) oraz sztuczne sieci neuronowe (K6).

Dla każdej klasy modeli oszacowano po kilkanaście równań różniących się: analityczną postacią trendu, rodzajem wahań sezonowych, zmiennymi objaśniającymi, wielkościami stałych wygładzania lub strukturą sieci neuronowych. Zmiennymi objaśniającymi w modelach przyczynowo-opisowych były: wielkość produkcji energii cieplnej w elektrowni B (w GJ) i przychody z jej sprzedaży (w tys. zł), a także wielkość produkcji energii elektrycznej w elektrowni B (w MWh) oraz przychody z jej sprzedaży (w tys. zł).

W drugim etapie na podstawie oszacowanych modeli wyznaczono prognozy *ex post* zmiennej KCE dla okresu dwunastomiesięcznego ($t = 37, 38, \dots, 48$), a następnie obliczono ich średnie błędy procentowe *MAPE* oraz *wMAPE*. Analizując trafność prognoz oraz stopień dopasowania modeli i istotność ich parametrów strukturalnych, z każdej klasy wybrano po jednym równaniu o najlepszych właściwościach predyktywnych.

W trzecim etapie, po wydłużeniu okresu estymacyjnego o 12 obserwacji ($t = 1, 2, \dots, 48$), sześć wybranych równań ponownie oszacowano. Na ich podstawie wyznaczono indywidualne prognozy *ex post* zmiennej KCE na ostatnie 12 miesięcy ($T = 49, 50, \dots, 60$); oznaczono je odpowiednio: $f_{1T}, f_{2T}, \dots, f_{6T}$. W kolejnych etapach badań stanowiły one prognozy składowe prognoz kombinowanych.

W czwartym etapie wyznaczono wagi prognoz kombinowanych zawierających od 2 do 6 prognoz składowych ($m = 2, 3, \dots, 6$). Zastosowano klasyczną metodę wariancji-kowariancji (VC) oraz metody optymalizacji jednokryterialnej – minimalizacji *MAPE* (M1) oraz *wMAPE* (M2). Do oszacowania wag wykorzystano wartości reszt modeli indywidualnych w wydłużonym okresie estymacyjnym.

W piątym etapie wyznaczono prognozy kombinowane zmiennej KCE na ostatnie 12 miesięcy ($T = 49, 50, \dots, 60$) i dokonano oceny ich trafności na podstawie średnich względnych błędów *MAPE* oraz *wMAPE*.

PREZENTACJA I ANALIZA WYNIKÓW BADAŃ

Zgodnie z przedstawioną powyżej procedurą dokonano wyboru sześciu modeli indywidualnych i wyznaczono na ich podstawie prognozy *ex post* zmiennej KCE na ostatnie 12 miesięcy ($T = 49, 50, \dots, 60$). Oceny przeciętnych względnych błędów prognoz indywidualnych zestawiono w tab. 2.

Tabela 2. Oceny błędów prognoz indywidualnych [%]

Prognoza indywidualna	<i>MAPE</i>	<i>wMAPE</i>
f_{1T}	11,80	11,88
f_{2T}	11,80	11,66
f_{3T}	10,15	10,35
f_{4T}	10,50	10,52
f_{5T}	9,84	10,21
f_{6T}	8,26	8,85

f_{jT} – prognoza indywidualna na okres T , wyznaczona na podstawie modelu K_j ($j = 1, 2, \dots, 6$).

Najniższe oceny błędów *MAPE* otrzymano dla prognoz indywidualnych wyznaczonych za pomocą sztucznej sieci neuronowej (8,26%) i modelu adaptacyjnego (9,84%). Błędy prognoz opartych na predyktorach przyczynowo-opisowych (10,15% i 10,50%) były tylko nieznacznie mniejsze od błędów prognoz otrzymanych na podstawie modeli szeregu czasowego (11,80%). Na zmniejszenie ich dokładności miała wpływ bardzo duża skala wahań sezonowych zmiennych objaśniających. Podobne wnioski można wyciągnąć z analizy wartości ważonego miernika *wMAPE*, należy jednak zwrócić uwagę na to, że tylko w jednym przypadku (dla hierarchicznego modelu szeregu czasowego) ocena tego błędu jest niższa, w porównaniu z miernikiem klasycznym.

Otrzymane prognozy indywidualne stanowiły prognozy składowe prognoz kombinowanych. Oceny średnich względnych błędów prognoz kombinowanych zestawiono w tab. 3 i 4; dodatkowym indeksem dolnym (po przecinku) oznaczono numery prognoz indywidualnych uwzględnionych w danej prognozie kombinowanej f_{cT} .

Tabela 3. Oceny błędów *MAPE* prognoz kombinowanych (w [%])

f_{cT}	M1	M2	VC	f_{cT}	M1	M2	VC	f_{cT}	M1	M2	VC
$f_{cT,12}$	11,80	11,80	11,80	$f_{cT,134}$	10,13	10,13	10,12	$f_{cT,1245}$	10,52	10,52	12,22
$f_{cT,13}$	10,15	10,15	10,15	$f_{cT,135}$	10,15	10,15	12,19	$f_{cT,1246}$	10,15	10,18	11,29
$f_{cT,14}$	10,52	10,52	10,76	$f_{cT,136}$	8,20	8,02	9,69	$f_{cT,1256}$	10,05	5,91	10,92
$f_{cT,15}$	11,80	11,80	12,08	$f_{cT,145}$	10,52	10,52	11,99	$f_{cT,1345}$	10,13	10,13	12,17
$f_{cT,16}$	8,98	4,03	10,40	$f_{cT,146}$	9,55	4,62	11,74	$f_{cT,1346}$	8,18	6,59	9,72
$f_{cT,23}$	10,15	10,15	10,15	$f_{cT,156}$	9,92	5,39	11,15	$f_{cT,1356}$	8,66	4,23	10,56
$f_{cT,24}$	10,29	10,29	10,24	$f_{cT,234}$	10,13	10,13	10,11	$f_{cT,1456}$	9,47	7,97	12,81
$f_{cT,25}$	8,23	8,09	8,73	$f_{cT,235}$	10,15	10,15	11,98	$f_{cT,2345}$	10,13	10,13	11,93
$f_{cT,26}$	4,73	4,96	8,42	$f_{cT,236}$	8,20	7,48	9,65	$f_{cT,2346}$	8,37	8,37	9,68
$f_{cT,34}$	10,13	10,13	10,12	$f_{cT,245}$	10,02	9,95	10,22	$f_{cT,2356}$	8,34	4,42	10,18
$f_{cT,35}$	10,15	10,15	11,93	$f_{cT,246}$	8,93	4,59	10,82	$f_{cT,2456}$	7,23	4,94	10,43
$f_{cT,36}$	8,31	7,91	9,76	$f_{cT,256}$	5,01	5,27	7,28	$f_{cT,3456}$	8,52	8,01	10,64
$f_{cT,45}$	9,59	9,59	10,04	$f_{cT,345}$	10,13	10,13	11,89	$f_{cT,12345}$	10,13	10,13	12,18
$f_{cT,46}$	8,08	3,47	9,85	$f_{cT,346}$	8,20	8,04	9,79	$f_{cT,12346}$	8,47	8,50	9,69
$f_{cT,56}$	8,76	8,60	8,81	$f_{cT,356}$	8,20	8,04	10,75	$f_{cT,12356}$	8,44	8,06	10,35
$f_{cT,123}$	10,15	10,15	10,15	$f_{cT,456}$	6,96	6,96	9,54	$f_{cT,12456}$	8,11	8,32	12,41
$f_{cT,124}$	10,52	10,52	10,69	$f_{cT,1234}$	10,13	10,13	10,13	$f_{cT,13456}$	8,44	8,63	10,22
$f_{cT,125}$	11,80	9,62	12,08	$f_{cT,1235}$	7,73	10,15	12,22	$f_{cT,23456}$	8,44	8,45	10,08
$f_{cT,126}$	8,39	6,46	10,19	$f_{cT,1236}$	8,07	8,21	9,64	$f_{cT,123456}$	8,19	8,18	10,16

Analizując informacje przedstawione w tab. 3, można zauważyć, że najniższe oceny błędów prognoz *ex post* otrzymano dla metody M2 polegającej na minimalizacji ważonego średniego błędu względnego *wMAPE*. Na uwagę zasługują zwłaszcza kombinacje $f_{cT,16}$, $f_{cT,46}$, $f_{cT,146}$, $f_{cT,246}$, $f_{cT,1256}$, $f_{cT,1356}$, $f_{cT,2356}$, oraz $f_{cT,2456}$, w przypadku których oceny błędów prognoz otrzymanych metodą M2 są o ponad 4 punkty procentowe niższe niż w przypadku pozostałych metod. W wyróżnionych kombinacjach prognozami składowymi są zarówno prognozy indywidualne o największych błędach (wyznaczone na podstawie klasycznych lub hierarchicznych modeli szeregów czasowych), jak i pozostałe prognozy o mniejszych błędach. W każdej z tych kombinacji występuje najbardziej trafna prognoza wyznaczona za pomocą sztucznej sieci neuronowej – połączenie jej z prognozami o większych błędach pozwoliło na wyznaczenie prognozy kombinowanej o znacznie wyższej trafności. Zdecydowanie najwyższe oceny błędów *ex post* otrzymano dla prognoz kombinowanych wyznaczonych metodą wariancji–kowariancji.

Tabela 4. Oceny błędów *wMAPE* prognoz kombinowanych [%]

f_{cT}	M1	M2	VC	f_{cT}	M1	M2	VC	f_{cT}	M1	M2	VC
$f_{cT,12}$	11,88	11,88	11,88	$f_{cT,134}$	10,33	10,33	10,15	$f_{cT,1245}$	10,60	10,60	12,25
$f_{cT,13}$	10,35	10,35	10,35	$f_{cT,135}$	10,35	10,35	12,12	$f_{cT,1246}$	10,22	10,25	11,32
$f_{cT,14}$	10,60	10,60	10,79	$f_{cT,136}$	8,35	8,17	9,69	$f_{cT,1256}$	10,08	5,87	10,98
$f_{cT,15}$	11,88	11,88	12,18	$f_{cT,145}$	10,60	10,60	11,99	$f_{cT,1345}$	10,33	10,33	12,21
$f_{cT,16}$	9,00	4,10	10,46	$f_{cT,146}$	9,59	4,55	11,77	$f_{cT,1346}$	8,34	6,63	9,73
$f_{cT,23}$	10,35	10,35	10,35	$f_{cT,156}$	9,96	5,35	11,18	$f_{cT,1356}$	8,83	4,32	10,58
$f_{cT,24}$	10,32	10,32	10,24	$f_{cT,234}$	10,33	10,33	10,15	$f_{cT,1456}$	9,51	7,97	12,89
$f_{cT,25}$	8,15	8,02	8,93	$f_{cT,235}$	10,35	10,35	11,99	$f_{cT,2345}$	10,33	10,33	11,97
$f_{cT,26}$	4,79	4,93	8,22	$f_{cT,236}$	8,35	7,58	9,66	$f_{cT,2346}$	8,52	8,54	9,78
$f_{cT,34}$	10,33	10,33	10,02	$f_{cT,245}$	10,04	9,98	10,23	$f_{cT,2356}$	8,50	4,50	10,10
$f_{cT,35}$	10,35	10,35	11,95	$f_{cT,246}$	8,93	4,50	10,86	$f_{cT,2456}$	7,20	4,86	10,33
$f_{cT,36}$	8,47	8,06	9,79	$f_{cT,256}$	5,10	5,49	7,32	$f_{cT,3456}$	8,69	8,16	10,66
$f_{cT,45}$	9,61	9,61	10,12	$f_{cT,345}$	10,33	10,33	11,95	$f_{cT,12345}$	10,33	10,33	12,24
$f_{cT,46}$	8,05	3,55	9,88	$f_{cT,346}$	8,35	8,20	9,89	$f_{cT,12346}$	8,63	8,66	9,74
$f_{cT,56}$	9,27	9,13	8,82	$f_{cT,356}$	8,35	8,20	10,79	$f_{cT,12356}$	8,50	8,21	10,35
$f_{cT,123}$	10,35	10,35	10,35	$f_{cT,456}$	6,92	6,92	9,56	$f_{cT,12456}$	8,12	8,33	12,48
$f_{cT,124}$	10,60	10,60	10,79	$f_{cT,1234}$	10,33	10,33	10,17	$f_{cT,13456}$	8,51	8,79	10,25
$f_{cT,125}$	11,88	9,64	12,13	$f_{cT,1235}$	7,73	10,35	12,13	$f_{cT,23456}$	8,60	8,61	10,28
$f_{cT,126}$	8,39	6,39	10,21	$f_{cT,1236}$	8,23	8,32	9,65	$f_{cT,123456}$	8,35	8,34	10,16

Wnioski, wynikające z analizy wyników przedstawionych w tab. 4, są analogiczne do przedstawionych powyżej – również i w tym przypadku najwyższą trafnością charakteryzują się prognozy kombinowane z wagami wyznaczonymi w procesie minimalizacji ważonego średniego błędu względnego *wMAPE*. Należy jednak zwrócić uwagę, że – podobnie jak w przypadku prognoz indywidualnych – miernik ważony daje wyższe oceny błędów prognoz.

Trafność wyznaczonych prognoz kombinowanych porównano również z trafnością prognoz indywidualnych; w związku z powyższymi uwagami wykorzystano w tym celu miernik *MAPE*. W tabeli 5 zestawiono odsetki prognoz kombinowanych o błędach równych lub mniejszych od najmniejszego błędu ich prognoz składowych.

Tabela 5. Odsetki prognoz kombinowanych o błędach nie większych od najmniejszego błędu prognoz składowych

Metoda	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 2-6$
M1	66,7	50,0	46,7	16,7	100,0	49,1
M2	80,0	70,0	80,0	83,3	100,0	75,4
VC	46,7	20,0	6,7	0,0	0,0	21,1

Analizując informacje zawarte w ostatniej kolumnie tab. 5, można stwierdzić, że najwyższe (przekraczające 75%) odsetki otrzymano dla metody M2. Oznacza to, iż większość prognoz kombinowanych, wyznaczonych przy wykorzystaniu metody polegającej na minimalizacji miernika ważonego *wMAPE*, charakteryzuje się wyższą trafnością niż ich prognozy składowe. Dla poszczególnych wartości m odsetki wyższe od 50% (co oznacza, iż ponad połowa prognoz kombinowanych charakteryzuje się większą trafnością niż prognozy składowe) otrzymano dla metody M1 przy 2 oraz 6 prognozach składowych, oraz we wszystkich przypadkach dla metody M2. Dla metody VC odsetki były najniższe i wyniosły średnio 21,1%.

PODSUMOWANIE

Przeprowadzone badania wykazały, że w sytuacji występowania wahań sezonowych o umiarkowanym natężeniu miernik klasyczny (średni absolutny błąd procentowy *MAPE*) zapewnia uzyskanie mniejszych błędów *ex post* prognoz (indywidualnych oraz kombinowanych) niż przy zastosowaniu do oceny ich trafności miernika ważonego *wMAPE*.

Większość prognoz kombinowanych, otrzymanych w wyniku minimalizacji ważonego średniego absolutnego błędu procentowego *wMAPE*, charakteryzuje się wyższą trafnością niż prognozy indywidualne oraz prognozy kombinowane, wyznaczone za pomocą metody minimalizacji klasycznego miernika *MAPE* lub metody wariancji–kowariancji.

PIŚMIENNICTWO

- Armstrong J., Collopy F.** 1992. Error measures for generalizing about forecasting methods: empirical comparisons. *Inter. J. Forecast.* 8, 69–80.
- Bates J., Granger C.** 1969. The combination of forecasts. *Operat. Res. Quart.* 20, 451–468.
- Dittmann P.** 2003. Prognozowanie w przedsiębiorstwie. Kraków, Oficyna Ekonomiczna.
- Granger C., Newbold P.** 1974. Experience with forecasting univariate time series and the combination of forecasts. *J. Royal Stat. Soc. A* 137, 131–165.
- Kaźmierska-Zatoń M., Zatoń W.** 2010. Multi-criteria combined forecasts. *Econometrics* 28, 59–75.
- Kwiatkowska-Ciotucha D., Załuska U.** 2002. Mierniki błędów prognoz *ex post* – teoria i zastosowania. *Prz. Stat.* 49(3), 147–161.
- Oesterreich M.** 2015. Application of descriptive models to forecasting seasonal time series with gaps. *Econometrics* 1(47), 68–77.
- Prognozowanie gospodarcze. Metody i zastosowania.** 2005. Red. M. Cieślak, Warszawa Wydaw. Nauk. PWN.
- Szmuksta-Zawadzka M., Zawadzki J.** 2012. O miernikach dokładności prognoz *ex-post* w prognozowaniu zmiennych o silnym natężeniu sezonowości. *Met. Iloś. Bad. Ekon.* 13(1), 212–223.
- Załuska U.** 2000. Błędy prognoz *ex post* – wskazówki aplikacyjne. *Pr. Nauk. AE Wroc.* 838, 113–120.
- Zeliaś A.** 1997. Teoria prognozy. Warszawa, PWE.